# VÁLOGATÁS AZ Érintő ELSŐ 7 ÉVÉBŐL

BOLYAI TÁRSULAT

# Válogatás

# az Érintő első 7 évéből

Budapest, 2023

**Válogatás az Érintő első 7 évéből**

A kiadvány online változata letölthető: https://www.bolyai.hu/kiadvanyaink-valogatas-az-erinto-elso-het-evebol. A könyv cikkei eredetileg az Érintő Elektronikus Matematikai Lapokban (www.ematlap.hu) jelentek meg.

A kinyomtatott könyv olvasásakor a szöveget kiegészítő linkek megnyitásához segítség lehet néhány, az oldal szélén található QR-kód. A kötetben szereplő linkek letölthetőségét 2023. október 21-én ellenőriztük.



Kiadja a Bolyai János Matematikai Társulat

Felelős kiadó: Simon Péter

Szerkesztők: Oláh Vera és Fried Katalin

Borító © Egyed Anna

# Tartalomjegyzék

# Előszó

„Kutya nehéz úgy hazudni, ha az ember nem ösmeri az igazságot” – kezdődik Esterházy Harmonia Caelestis-e. Az igazság ismerete nélkül azonban nemcsak hazudni, hanem igazat mondani sem könnyű. Egyszerű azt mondani, hogy a matematika mai modern világunkban mindenütt ott van (mutogathatunk elektronikus eszközökre, mobil alkalmazásokra, online bankolásra), de pontosan megnevezni a matematikát, ami ott van, és hogy milyen közvetett módon van ott, már nem is olyan könnyű. Persze az olvasó dolga sem egyszerű. Azt nem nehéz elfogadni, hogy a matematika jelen van, de az igazság megtalálásához még átlagos matematikai ismeretekkel is nagyon komoly erőfeszítéseket kell tenni.

A legfőbb nehézséget az okozza, hogy az iskolában tanult matematika és a mai modern matematika között hatalmas szakadék tátong, és a leghétköznapibb alkalmazás hátterét is olyan matematika szolgáltatja, amit meglehetősen nehéz a középiskolás tananyaghoz kapcsolni. Gondoljunk a mai autókban található automatikus fékező és sebességszabályozó rendszerekre, amiket kamerák vagy különböző radarok segítségével vezérel egy fedélzeti számítógép. Milyen elven működik ez a rendszer? Hogyan észleli, hogy fékezni kell? Mennyire kell fékezni? Hogyan kell kivitelezni magát a fékezést? Próbáljunk meg ennek a komplex rendszernek csak egy nagyon lecsupaszított feladatára fókuszálni: egy 100 km/h sebességgel haladó autót egyenletes fékezéssel állóra kell fékeznünk 3 másodperc alatt. Ezalatt a 3 másodperc alatt hány métert tesz meg az autó? Ha szeretnénk elkerülni az ütközést, akkor ezt az adatot feltétlenül ki kell tudnunk számolni. A kérdés megválaszolásához egy másodrendű differenciálegyenletet kell megoldanunk. Középiskolából emlékezhetünk másodfokú egyenletekre (sokan talán még a megoldóképletet is tudják), és valóban, az egyszeri ismeretterjesztőnek szerencséje van, mert egy ponton – némi integrálás után – másodfokú kifejezésekkel kell számolni. Tehát a feladatot hozzá tudjuk kapcsolni a középiskolás emlékeinkhez. De mit tudunk felidézni akár csak egy egyismeretlenes, de harmadfokú egyenlet megoldhatóságáról? A harmadfokú egyenlet megoldóképlete a XVI. század óta ismert, csak épp nagyon bonyolult, megértéséhez nem elegendő a valós számok ismerete, szükségesek hozzá a komplex számok. Tehát már a XVI. századi matematika bemutatásához is jócskán el kéne emelkedni a mai középiskolás tananyagtól; hát még mire vállalkozik az, aki a XX., vagy pláne a XXI. századi fejleményekről akar beszámolni? Egy másik példa: az internetes bankolás manapság igazán egyszerű feladatnak tűnik – persze szeretnénk magunkat biztonságban tudni, ne kerüljenek személyes vagy banki adataink illetéktelenek kezébe-gépére. Az internetes titkosítás (nem meglepő módon) szintén matematikai eredményeken alapul – ez esetben a középiskolából jól ismert prímszámok és azok bizonyos tulajdonságai játsszák a főszerepet. De melyek is ezek a tulajdonságok, azokat hogyan lehet felhasználni, és aztán ezt az elméletet hogyan lehet a gyakorlatba átültetni?

Az Érintő szerkesztői 7 évvel ezelőtt arra vállalkoztak, hogy megpróbálják áthidalni azt a bizonyos szakadékot.

Létrehoztunk egy elektronikus lapot, ami – hála mostanra már többszáz szerzőnknek – minden matematika iránt érdeklődő olvasó számára – előképzettségüktől függetlenül – mond valamit. Rendszeresen beszámolunk az éppen aktuális magyar vonatkozású érdekességekről, és megpróbáljuk megszólítani azokat is, akik nem rendelkeznek komoly matematikai háttérrel, de érdeklődnek a tudomány iránt. Tanóra – szakkör rovatunkkal a matematikatanárok eszköztárának gazdagításához és diákjaik motiválásához igyekszünk hozzájárulni. Az Érintő hetedik évében elindítottuk Héttusa rovatunkat, amely a rejtvények, fejtörők kedvelőinek szól, és persze azoknak, akiknek hiányoznak a korábbi tanulmányok során megszokott (esetleg trükkös) kihívások.

Ebben a kiadványban az első 7 év terméséből válogattunk össze egy csokorra valót. A teljesség igénye nélkül rendeztük kötetbe online matematikai lapunk pár cikkét, amelyek megítélésünk szerint jól jellemezték az újságot az elmúlt években, és bemutatják, hogy merre szeretne tartani a jövőben.

Az Érintő szerkesztésében 2022-ben bekövetkezett váratlan haláláig meghatározó szerepet töltött be Besenyei Ádám, aki egymaga megtestesítette célkitűzéseinket. Elkötelezett volt nemcsak a tudomány és alkalmazásai, de a tudományos ismeretterjesztés iránt is, életének utolsó éveiben pedig az egyetemi teendői mellett végtelen lelkesedéssel tanított középiskolában is. Ezzel a könyvvel rá is emlékezünk.

*Stipsicz András és Titkos Tamás*

*Stipsicz András az ELTE matematikus szakának elvégzése után New Jerseyben, a Rutgers Egyetemen szerzett PhD fokozatot 1994-ben. Az ELTE Analízis Tanszékén, majd több neves külföldi egyetemen (Columbia Egyetem, Princeton Egyetem, Kaliforniai Egyetem) oktatott. Az MTA tagja, a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet kutatóprofesszora és igazgatója, az Érintő főszerkesztője. Kutatási területe a differenciáltopológia, azon belül az alacsony (legfeljebb négy) dimenziós terek vizsgálata.*

*Titkos Tamás egyetemi és doktori tanulmányait az ELTE-n folytatta, 2016 óta a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet tudományos munkatársa. 2018-ban elnyerte az Akadémiai Ifjúsági Díjat és a Bolyai János Kutatási Ösztöndíjat, 2021-ben az MTA III. osztályának Alexits-díját. Munkássága leginkább a funkcionálanalízishez köthető. Az Érintő rovatvezető szerkesztője.*

# Kit érint a matematika?
## (2016. szeptember, Hírek – újdonságok)

Sosem voltam jó matekból – mondja viccesen a riporter vagy a riportalany, kifejezve társadalmunk széles rétegének viszonyulását a matematikához. Bár a közoktatásban kiemelten, 12 éven át tanítják, sok gyereknek előbb-utóbb rettegett tantárgyává válik, amit nehéz megérteni, nehéz megtanulni. Ők felnőttként még azt a keveset is, amit tudtak, igyekeznek elfelejteni. Másoknak a matematika mintha a vérükben lenne, szinte nem is kell tanulniuk, könnyedén oldják meg a feladatokat, sorra nyerik a versenyeket. Szerintük érdekes és szép. Vannak, akik nem értik, mire jó a matematika, miért is kell kínozni ezzel az elvont tudománnyal a tanulókat. Valóban csak keveseknek, kiváltságosaknak okozhatnak örömet a matematika logikus kérdései, válaszai, megoldatlan problémái, szépsége és igazsága? A való életben mire használható, amit ebből a tárgyból tanulunk?

A matematika az ókortól kezdve egyre inkább a társadalom tudásának alapja, nélküle nem lett volna építészet, kereskedelem, technika, informatika, telefon, tévé, internet és facebook. A fizika, a kémia, a biológia vagy a haditechnika sem tudott volna fejlődni a matematikusok újabb és újabb elméletei, tételei nélkül. Mint ahogy a matematika is újabb és újabb inspirációt kapott a tudományok és a technika eredményeitől.

A római számok között hiába keressük a nullát, a negatív számokról nem is beszélve, ezek csak a középkorban, a kereskedelem igényei nyomán kerültek be a matematikába. A XII. században a semmi absztrakciójaként bevezetett nulla mára közismertté vált, és ez minden bizonnyal elmondható a XIX. század végén bevezetett üres halmazról is. A végtelen kicsi és végtelen nagy fogalmának bevezetése, melyet a XVII. századi fizika erősen motivált, az analízis kialakulásához vezetett. Mára minden mérnök és közgazdász bevezetést kap a differenciál- és integrálszámítás rejtelmeibe, melynek fogalmai teljesen átjárják a gazdasági és technikai világunkat. Az informatika kora is visszahatott a matematikára, gondoljunk csak az internetes fizetést lehetővé tevő kriptográfiára, vagy az információk keresését szolgáló adatbányászatra. Az elmúlt néhány évtizedben számos új matematikai terület létrejöttének lehettünk tanúi a káoszelmélettől a pénzügyi változásokat modellező véletlen folyamatokon át a nagy hálózatok vizsgálatáig. Az így kialakult diszciplínák fokozatosan beépülnek a matematika hagyományos területei közé. Mára a matematika életünk szinte minden részét átszövi. A matematikai logikát, algoritmusokat alkalmazó rendszerszintű gondolkodás a sikeres vállalat számára kulcsfontosságú. Az iparban, a bankszférában egyre keresettebbek a matematikusok. Statisztikák szerint az egyik legjobb foglalkozás a világon a matematikusé: nyugalmas, széles körben keresett és emellett jövedelmező!

Talán mégiscsak érdemes lenne több gyerekkel és felnőttel megértetni, megszerettetni a matematikát, megmutatni hasznosságát, alkalmazhatóságát! Hiszen szinte nincs az életnek olyan területe, amelyet a matematika ne érintene!

A Bolyai János Matematikai Társulat feladatának érzi, hogy hazánkban ezt az üzenetet széles körben terjessze, a matematika eredményeit, ezek innovatív hatásait sokak számára elérhetővé tegye. Ez vezetett néhányunkat arra, hogy elindítsuk a Társulat elektronikus matematikai lapját, az Érintőt. Számos kérdésre szeretnénk választ kapni mi is mindannyian, akiket már régen megérintett a matematika. Mivel foglalkozik ma a matematikai kutatás? Hogyan épülnek be az új matematikai felfedezések a mindennapjainkba? Hogyan lehet az egyre szélesedő ismeretanyagot, a mélységet nem feladva, a következő generációnak átadni? Hogyan lehet ebben segíteni a szülőknek? Kik azok, akik napjainkban a matematikai kutatás és innováció élvonalában dolgoznak?

Többek között ezeket a témákat szeretnénk körüljárni negyedévente megjelenő folyóiratunk rovataiban, ismeretterjesztő írásokkal a matematika tanításáról, tudományos eredményeiről, ipari és pénzügyi alkalmazásairól, könyvismertetésekkel, portrékkal, hírekkel. Szeretnénk megszólítani mindazokat, akik a matematikát tanulják, tanítják, kutatják, vagy bárhol alkalmazzák. Reméljük azonban, hogy az Érintőt nemcsak azok olvassák, akiket munkájuk, tanulmányuk a matematikához köt, hanem minden érdeklődő.

szerk@ematlap.hu címünkre várjuk mások ötleteit is, amelyekkel hozzá tudunk járulni ahhoz, hogy minél többen érezzék azt, hogy a matematika őket is megérintette.

*Simon L. Péter és Oláh Vera*

Simon L. Péter

## Érdemes-e matematikát tanulni – avagy a világ legjobb állásai (2016. december, Gazdaság – technika – művészet)

„És mit fog majd a matematikával kezdeni, ha elvégzi az egyetemet?” – kérdezte a gyermeke jövőjéért aggódó szülő minap a Matematikai Intézet nyílt napján, gyorsan hozzátéve, hogy nem szeretne a gyerek tanár lenni. Benne van ebben a kérdésben minden, amit társadalmunk széles rétegei a matematikáról gondolnak. Mit lehet erre a válaszolni? Gondolatébresztőnek íme néhány szempont.

Ha valaki az orvosi egyetemre jelentkezik, akkor jó eséllyel orvos lesz, de legalábbis az egészségügy területén fog dolgozni. Matematikából szerzett diplomával a fiatal előtt ennél szélesebb spektrum áll nyitva, a pénzügyi szférától a telekommunikáción és az autóiparon át a hazai és külföldi kutatóintézetekig és egyetemekig, különösen, ha kellő informatikai ismeretekkel is fel van vértezve. Egy reprezentatívnak nem nevezhető, de a trendet mégis kifejező magyarországi felmérés szerint 25 végzett hallgató közül tízen a szoftverfejlesztés és adatbányászat területén, nyolcan bankoknál, biztosítóknál és telekommunikációs cégeknél, heten pedig a felsőoktatásban dolgoznak, és néhány évvel a végzésük után ötödrészük fizetése több mint 500 ezer forint.

A Carreercast karrierkutató cég Egyesült Államokban végzett kutatása szerint a matematikával kapcsolatos állások a legjobbak között vannak minden évben. 2015-ben például a legjobb állások fenti rangsorában 200 állás közül első helyre került az aktuárius (biztosítási matematikus), a harmadik helyre a matematikus és a negyedikre a statisztikus. Vagyis a legjobb négy állás közül három a matematikához kötődik. Ebben az alaposan kidolgozott metodikájú felmérésben természetesen nemcsak a fizetés nagysága szabja meg az állások rangsorát, hanem megfelelő súllyal figyelembe veszik a következő öt szempontot: a jövedelmet, a munkakörülményeket, a munkahelyi előmenetel lehetőségeit, a minél kevesebb stresszt és fizikai megterhelést.

Tágabb szemszögből nézve, az USA-ban, Európában, és hazánkban is különös figyelmet szentelnek a STEM (Science, Technology, Engineering, Mathematics) területnek, amely szükségszerű a versenyképességhez. A matematikai, természettudományos, műszaki és informatikai (magyarul MTMI) szektorban a magyarországi felmérések szerint több munkaerőre lenne szükség, mint amennyit az egyetemi képzések biztosítanak. Miután mind a négy területhez elengedhetetlen a matematikatudás, így az ország gazdasági stabilitása és továbbfejlődése szempontjából kulcsszerephez jut a (közép)iskolai matematikaoktatás. Ehhez pedig még több elkötelezett tanárra lesz szükség. Talán még a fent említett érdeklődő szülő is örülne néhány év múlva, ha csemetéje matematikatanításra szeretné adni a fejét.

De ha nem tanít, akkor vajon szükség lesz-e rá egy vállalatnál? Érdemes elolvasni ezzel kapcsolatban egy jelentős amerikai üzleti lap, a Fortune cikkét az algoritmikus gondolkozású vállalatvezetőről. A cikk vezérgondolata: „Készüljünk fel a legelsöprőbb változásra az üzleti életben az ipari forradalom óta”, amely a szerző szerint abban áll, hogy a matematikai algoritmusok és az azokon alapuló szoftverek behatolnak az üzleti életbe. Kiemelkedő cégek, mint a Google vagy az Amazon példáján mutatja be, hogy a matematika segítségével óriási üzleti előnyre tehet szert egy vállalat. A cikk konklúziója szerint a matematikai gondolkozás olyan mértékben befolyásolja az üzleti élet mindennapjait, hogy hamarosan elengedhetetlenné válik a vállalatirányítás, szervezés, működtetés újragondolása.

Ezek alapján bátran megnyugtathatunk minden aggódó szülőt, hogy ha gyermeke szereti a matematikát, akkor jól teszi, ha egyetemi szinten is foglalkozik vele.

Rövid bevezetőnket gondolatindítónak szántuk, amelyre olyan írásokat várunk folyóiratunkba, amelyek további adatokkal, észrevételekkel szolgálnak a kérdéshez, hogy miért érdemes matematikát tanulni.

*Simon L. Péter*
*ELTE TTK Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék*

*Simon L. Péter az ELTE TTK Matematikai Intézetének igazgatója és az Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszékének vezetője. Kutatási területe a differenciálegyenletek kvalitatív elmélete, az utóbbi években a hálózati folyamatok, elsősorban a járvány- és az információterjedés vizsgálata. 2014-ben szerezte meg az MTA doktori címét, 2015 óta a Bolyai János Matematikai Társulat főtitkára, 2016-tól az Érintő főszerkesztője.*

# A zenében rejlő matematika
## (2017. december, Gazdaság – technika – művészet)

Azt mondják, hogy a matematikusok között igen sok zenészt találni. Ez nem meglepő, hiszen mind a zene keltésében, mind magában a rezgő közeg fizikai viselkedésében, sőt, a zene lejegyzésében is rengeteg matematikailag könnyen leírható tulajdonságot fedezhetünk fel. Az, hogy a szép, s logikus rend mellé gyönyörködtető hangzás is párosul, magához vonzza a szépség iránt amúgy is igen érzékeny matematikusokat. Szoktuk is mondogatni a matematikában, hogy ha egy bizonyítás szép, akkor az nagy valószínűséggel jó is.

### Monochord – arany aránypár

Mint minden előadást, ezt is úgy illik kezdeni, hogy „már a görögök is…" Nem véletlen ez, hiszen az emberiség történetével egyidős lehet a – sokszor alig-alig ismert – zenei művészet. Valóban kevéssé ismert a régi idők zenéje, gondoljunk csak arra, hogy az egyik legszebb hangú hangszerünket a torkunkban hordozzuk… Sajnos, a régi emberek hangszereiről is kevés feljegyzés maradt fenn, s már a pár száz évvel ezelőtti hangszerek rekonstrukciója is nehéz feladat. A zene lejegyzése is elég későn alakult ki a történelem folyamán, nem is beszélve arról, hogy mit tekintett fontosnak lekottázni a korabeli zenész, s mi volt az, amit nem írt le, hiszen közismert tény volt.

De ha már a görögök, akkor természetesen – matematikatanárok lévén – rögtön Püthagorasz jut eszünkbe. Püthagorasz nevével kapcsolatban pedig háromszögekre gondolunk, s a velük kapcsolatos tételre. De gondolunk-e arra a Püthagoraszra, aki kitartóan érdeklődött a tiszta művészetek iránt? Gondolunk-e Püthagoraszra mint filozófusra? Gondolunk-e Püthagoraszra, aki az élet számos területén kereste a rendet, ahogy ő nevezte, a *szümphoniát*?

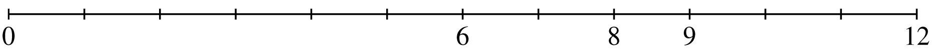
Közismert a történet, amelyet Püthagorasz nevéhez fűznek. Nevezetesen egy kalapácsműhely mellett elhaladva a négy kalapács csengését konszonánsnak, azaz szépen együttszólónak hallotta, s e tulajdonságot a kalapácsok súlya közötti összefüggéssel azonosította. A kedves história szép képet fest a nagy matematikusról, de kevéssé valószínű. Annyi viszont bizonyos, hogy igen behatóan tanulmányozta a monochord rezgéseit (lásd a fenti képen). Ilyen egyhúrú hang-

Monochord (Forrás:
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0b/MIM_String_Instruments.jpg)

szer csupán az iskolában fellelhető, az is csak demonstráció céljából. Azonban ne keseredjünk el, szinte mindenki talál a környezetében egy gitárt, ami céljainknak tökéletesen megfelel. Ennek teste kiválóan rezonál, erősíti a húr alig hallható hangját. Takarjuk le a nem szükséges húrokat, hogy kizárjuk azok zavaró hatását. Ezen a hangszeren már könnyedén kísérletezhetünk, hála a bundoknak, a fogólapon található rézlapoknak, melyek segítségével bárki tisztán lefoghatja a hangokat mindenféle zenei előképzettség nélkül.

Játsszunk a gitárunkkal! Egyetlen húrt – pl. a legalsó, a legvastagabb E-húrt – megpendítve más és más magasságú hangot kapunk, ha a húrt egy-egy bundnál lefogjuk. Püthagorasz hasonló kísérleteket végzett a monochordjával: a húrt 12 egyenlő hosszúságú részre osztotta fel, így könnyedén vette a húr felét, harmadát, ... (Szerencsére a 12-nek sok osztója van! ☺) Így ha most a felénél fogjuk le a húrt, akkor megpengetéskor az alaphang feletti oktávot, ha a $2/3$-ad részénél, akkor a kvintet, s ha a $3/4$-ed részénél, akkor a kvartot hallhatjuk. (Sok gitárnál a bundok közötti jel segítségünkre van az oktáv, s a kvart lefogásánál.) A kísérletet a többi húron elvégezve ugyanezeket a hangközöket figyelhetjük meg.

A kis egész számok arányaként felírt húrarányok meglepő módon éppen azok a hangközök, melyeknél a két hangot (alap és oktáv, alap és kvart, illetve alap és kvint) a leginkább szépen együttcsengőnek érzünk. (Ennek okára még később visszatérünk.) Amit a zenében szépnek találunk, az a matematikában is igen szép arányokkal, az *arany aránypár*ral írható fel. Lássuk, mi is ez!




Az ábrán láthatjuk, hogy a 12 egység hosszúságú húrt a kilencediknél lefogva az alaphang kvartját kapjuk meg, míg ha a 8 egység hosszúságú húrral tesszük ugyanezt, akkor a 6 egységnél kell lefognunk a húrt, hogy a rövidebb húr kvartját hallhassuk. Ezt matematikailag a $12 : 9 = 8 : 6$ arány igazolja.

Emellett még szintén érdekes, hogy a 9 (kvart) és a 8 (kvint) a 12 (alaphang) és a 6 (az alap oktávja) számtani, illetve harmonikus közepe:

$$A(6;12) = \frac{6+12}{2} = 9, \qquad H(6;12) = \frac{2}{\frac{1}{6}+\frac{1}{12}} = 8$$

Tehát az „arany aránypárt” ezekkel felírva:

$$12 : \frac{6+12}{2} = \frac{2}{\frac{1}{6}+\frac{1}{12}} : 6$$

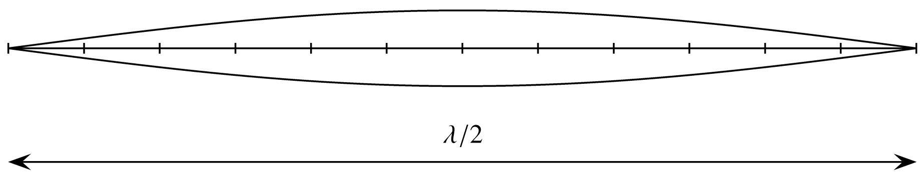
Püthagorasz a *kozmosz* szóval nevezte el a világ e szép harmóniáját. A szép rend számára mindenhol megjelent. Így például a kocka és duálisa, az oktaéder között figyelt meg szép rendet:

| kocka | oktaéder |
|---|---|
| 6 lap | 6 csúcs |
| 8 csúcs | 8 lap |
| 12 él | 12 él |

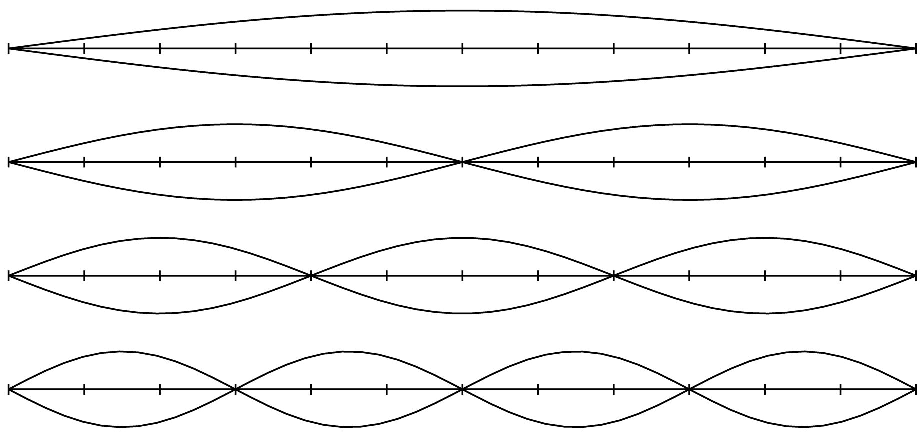
A szépre való törekvésünket minden művészetben megfigyelhetjük. A képeken, szobrokon, épületeken, de a drámák, zeneművek időbeli felépítésében is lépten-nyomon felfedezhetjük a kis egész számokkal felírható arányokat, vagy akár az aranymetszést. Ennek oka az ember, az ember és környezete, a világ harmonikus felépítésében keresendő. Nem véletlen, hogy Orfeusz muzsikájával a holtakra és élőkre is egyaránt hatással van, rezonálnak zenéjére.

## Hangközök – összegzés a zenében

Térjünk vissza az egyhúrú hangszerünkhöz. Mi is történik a húrral, ha megpendítjük?




A húr két végén rögzítve van, így szemmel látható, hogy a kifeszített drót a pendítés irányában, illetve ellentétesen kitér, egy orsószerű mintázatot hoz létre. Ez egy fél hullámhossz, hiszen a teljes szinuszgörbe fele jelenik meg előttünk.



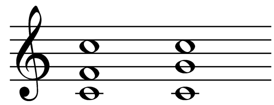
Ez azt jelenti számunkra, hogy a húron létrejövő rezgés hullámhossza éppen a húr hosszának a kétszerese lesz. Hasonlóképpen a húr hosszát rövidítve (lefogva egy-egy bundnál a húrt) a hullámhossz arányosan változik.

A hullámhossz és a frekvencia fordítottan arányos. (Lásd később, a szorzatuk éppen a hangsebességet adja meg az adott közegben.)

Vegyük most alaphangnak az egyvonalas $c$ hangot. A következő kottaképen az alaphangot és az oktávját láthatjuk egy-egy másik hanggal két további hangközre bontva. Így az első esetben az oktávot egy kvint és egy kvart, míg a második esetben egy kvart és egy kvint összegére bontottuk. Világos, hogy a két összeg ugyanazt az oktávot adja, vagyis az összeadás kommutatív tulajdonsága jelenik meg:

$$\text{kvart} + \text{kvint} = \text{kvint} + \text{kvart} = \text{oktáv}$$

De hogy néz ki matematikailag ez az összegzés? Írjuk fel a húrhosszak arányát!



(Oktáv: $\frac{1}{2}$, kvart: $\frac{3}{4}$, kvint: $\frac{2}{3}$.) Látható, hogy most az összeadás jel helyett a szorzás jelét kell használnunk, hogy az $1/2$ arányt megkapjuk:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

Ha a hangok összegzését a húrhosszak arányának szorzásával kell felírnunk, akkor ez egy matematikus számára azt jelenti, hogy a kotta a húrok arányainak logaritmusát (sőt, ld. később, a frekvenciák logaritmusát) ábrázolja:

$$\text{oktáv kottaképe} = \log\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}\right) = \log\left(\frac{2}{3}\right) + \log\left(\frac{3}{4}\right) = \text{kvint és kvart kottaképe}$$

Ha már az előbb felfedeztük, hogy tetszőleges húron végezhetjük a megfigyeléseinket, miért ne folytatnánk azzal a húrral, amellyel a játékot elkezdtük? Arra gondolok, hogy ha a húron a $3/4$-ed részt lefogva előállíthattam az E-húr kvintjét, azaz a H hangot, akkor megismételhetnénk a lefogást most a megrövidített húron, előállítva a H hang kvintjét. Ehhez nem kell mást tenni, mint a korábbi, a „megmaradt” $2/3$-ad hosszúságú húr $2/3$-ád kell venni. Így máris a H hang kvintjét hallhatjuk, a Fisz hangot.

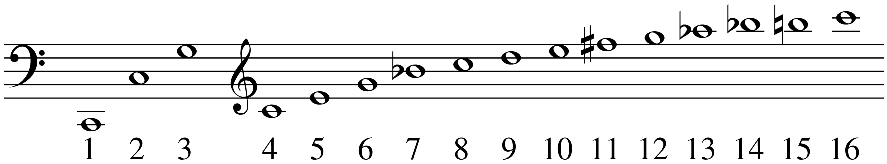
Matematikailag ez azt jelenti, hogy az eredeti húr $2/3$-ad részének $2/3$-ad részét vettük, azaz a $(2/3)^2 = 4/9$-ed részét vettük a húrnak. Zeneileg pedig azt mondhatjuk, hogy a kvintre ráépítettünk egy újabb kvintet. Matematikus gondolkodásunk máris érzi, hogy a zenei összegzés, a két kvint összeadása a hangok frekvenciájának szorzását fogja jelenteni…

## Konszonancia

Ismét visszatérve az egyhúrú hangszerünkhöz, vegyük fel gyorsított videóval a húr rezgéseit. Amint a felvételt lassítva visszanézzük, észrevehetjük, hogy a korábban szabad szemmel is jól látható orsószerű alakzatra további furcsa, de egyben mégis szabályos rezgések rakódnak rá. Ez azt jelenti, hogy a húr rezgésében további, rövidebb hullámhosszú rezgések találhatók.

Ezt kísérletileg könnyen ellenőrizhetjük, csupán annyi a dolgunk, hogy az alaphang rezgését megszüntessük. Ezt úgy tesszük meg, hogy a megpendítés után a húr közepét óvatosan megérintjük, mellyel a közepén megszüntetjük a rezgését. Ekkor a további rezgéseket hallhatjuk, közülük is a legerősebb az oktáv hangja lesz. (Ha a húr középen nem rezeg, akkor két orsószerű alakzat jön létre rajta, vagyis egy teljes szinuszhullám, melynek hullámhossza a húr hossza.)

Ha a kísérletet most úgy folytatjuk, hogy a húr $2/3$-ánál is megszüntetjük a rezgést, akkor az alaphang kvintjét hallhatjuk – igaz, egy oktávval feljebb. Tovább kísérletezve (ehhez már nagy ügyesség kell a gitáron) a további részhangokat is kinyerhetjük. Ezek a hangok a következő sorrendben jönnek elő:




Az egyes hangok alá írt számok nem csupán a sorrendet jelentik, hanem azt is, hogy az alaphang frekvenciájának ($\nu$) hányszorosa jött létre: $2\nu$, $3\nu$, $\dots$. Ez jól érthető a korábbi ábránkon, hiszen a kísérleteink során éppen egy-egy újabb orsószerű alakzat „fér rá” a húrra.

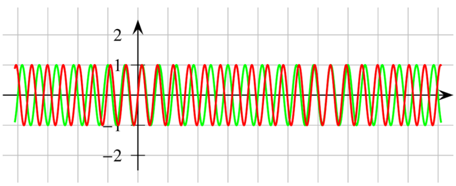
Ezt hívjuk felhangskálának. (Érdekességként érdemes megemlíteni, hogy a hangok különböző hangszínét éppen ezen felhangok különböző erőssége határozza meg. A fuvola hangjában pl. a felhangok egyenletesen csökkenő erősségűek, míg a klarinét felhangjai a csökkenő erősség mellett kissé hiányosak: minden második felhang hiányzik.)

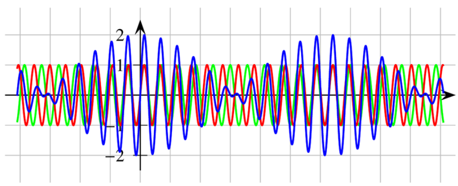
Korábbi tapasztalatainkból érdemes rögzítenünk, hogy az oktávok frekvenciái mindig az előzők kétszeresei ($2\nu$), míg a kvinteket egy $3/2$-es szorzással állíthatjuk elő ($3/2\nu$).

Mitől szól szépen két hang együtt? Közelítsük meg máshonnan a kérdést. Szép-e együtt a 440 Hz-es és a 441 Hz-es hang? (A 440 Hz-es hang azt jelentik, hogy a húr, a levegő részecskéi, a dobhártyánk, … éppen 440-et rezeg egy másodperc alatt. A 440 Hz-es hangot nevezzük a zenei A hangnak, erre hangolnak a zenekarok.)

Érdemes letölteni egy hanggenerátort a telefonunkra. Ilyen igen sokféle található. Például a Frequency Sound Generator segítségével egyszerre több frekvenciájú hangot is hallhatunk.

A két képen a nagyon magas rezgésszám nem lenne jól látható, helyette a 11 Hz-es, a 12 Hz-es, a jobboldali ábrán pedig a két előző összegével kiegészített rezgések láthatók.






A hangfelvételekre kattintva a 440 Hz-es, a 441 Hz-es, valamint e kettő összegét (a két hang együttes hangját) hallgathatjuk meg.

440 Hz-es hang:

441 Hz-es hang:


a két hang összege:


Ha külön-külön hallgatjuk e két hangot, nem halljuk a különbséget. Ellenben együtt érdekes hanghatást figyelhetünk meg: a hallott hang egy változó intenzitású hang lesz. Ennek okát igen egyszerűen magyarázhatjuk matematikailag.

A két rezgés:

$$y_1(t) = A\sin(440t)$$
$$y_2(t) = A\sin(441t)$$

A kettőt összeadva a következő függvényt kapjuk:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A\sin(440t) + A\sin(441t) =$$
$$= 2A \cdot \cos\left(\frac{440-441}{2}t\right) \cdot \sin\left(\frac{440+441}{2}t\right) = 2A \cdot \cos(0{,}5t) \cdot \sin(440{,}5t)$$

A kapott eredményen látszik, hogy a rezgés továbbra is szinuszos (a kettő átlagával, egy 440,5 Hz-cel rezgő hangot hallunk), melynek amplitúdója lassan – 0,5 Hz-cel – változik. (A 440,5 Hz-hez képest a 0,5 Hz igen kicsi frekvenciájú.) Ezt halljuk lebegésszerűnek.

Maga a hallható hangzás nem túl szép, de kiválóan használható hangoláshoz: amikor a két hang frekvenciája igen közel van egymáshoz, a lebegés lassan megszűnik:

$$y(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[A\sin(440t) + A\sin((440+\varepsilon)t)\right] =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[2A \cdot \cos\left(\frac{\varepsilon}{2}t\right) \cdot \sin\left(\left(440+\frac{\varepsilon}{2}\right)t\right)\right] = 2A\sin(440t)$$

Ugyanígy nem túl szép két hang együtt, ha felhangjai között van „súrlódás”, vagyis van olyan két felhang, melynek frekvenciái igen közel vannak egymáshoz.

A legszebb két hang, mely igen kellemesen együtt szól, a tiszta prím, vagyis az, mikor két ugyanolyan frekvenciájú hang szól. (Azonos a két hang.) Ekkor természetes, hogy minden felhang megegyezik. Ha a két hang egy oktávnyira van egymástól, akkor egész sok egyezés található a felhangok között, s alig van néhány hang, mely „súrlódik”. A kvarttal és a kvinttel már sokkal több baj van. Mint az alábbi táblázatból látszik, jóval kevesebb az egyezés. (A ’, ”, ”’, stb. jelzések azt jelentik, hogy hány vonalas hangról van szó, vagyis, hogy az alaphang felett hány oktávval van a hang magasabban.)

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | C’ | G’ | C” | E” | G” | B” | C”’ | D”’ | E”’ | Fisz”’ | G”” |
| $\nu$ | $2\nu$ | $3\nu$ | $4\nu$ | $5\nu$ | $6\nu$ | $7\nu$ | $8\nu$ | $9\nu$ | $10\nu$ | $11\nu$ | $12\nu$ |
| | C’ | | C” | | G” | | C”’ | | E”’ | | G”” |
| | $\nu'$ | | $2\nu'$ | | $3\nu'$ | | $4\nu'$ | | $5\nu'$ | | $6\nu'$ |
| | | G’ | | | G” | | | D”’ | | | D”” |
| | | $\nu^*$ | | | $2\nu^*$ | | | $3\nu^*$ | | | $4\nu^*$ |

A kvintnél a G alaphangra épülő sorban igen kevés egyezés van (G’, G”, D”’, G””):
G **G’** D” **G”** H” **D”’** F”’ G”’ A”’ H”’ E”” **G””**

A kvartnál az F alaphangra épülő sorban még kevesebb egyezés van (C”, C”’, G”’):

F F’ **C”** F” A” **C”’** Esz”’ F”’ **G”’** A”’ H”’ F””

A zenében a terc igen későn került a játszott hangközök közé. Ezt a hangközt igen sokáig disszonánsnak tartották.

A következő hangmintákat meghallgatva egészen archaikusnak tűnik az oktáv, illetve régies, gregoriánszerű a kvint párhuzamban hallható Tavaszi szél vizet áraszt kezdetű dal. (A szekund távolságra lévő két szólamot bántó hallgatni.)
Tiszta prím:

Oktáv:


Kvint:


Szekund:


## A pitagoraszi hangsor

Ha csupán az oktávot tekintjük szépen konszonáns hangzatnak, akkor a többi hangközt nem fogjuk használni.

A kvint is igen szépen együttcsengő hangköz. Használjuk fel a skálánk felépítéséhez. Mielőtt matematikázunk, ismételjük át egy kicsit a fizikai ismereteinket!

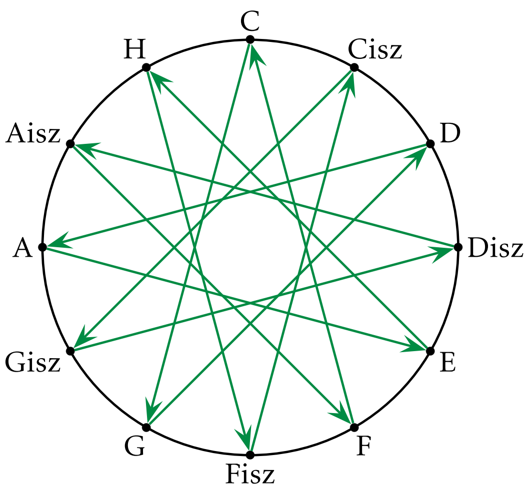
Tanultuk, hogy a levegőben kb. 340 m/s a hang sebessége, ami nem más, mint az egyetlen hanghullám hullámhossza osztva a hozzá szükséges idővel, a periódusidővel, vagy másként: a hullámhossz és a frekvencia szorzata.

$$c = 340 \text{ m/s} \left(= \frac{\lambda}{T}\right) = \lambda \cdot \nu$$

Az adott közegben ez a sebesség állandó, tehát a hullámhossz ($\lambda$) és a frekvencia ($\nu$) fordított arányban áll egymással. Az előzőeket egy táblázatban összefoglalva láthatjuk az összefüggéseket a zenei kifejezések (oktáv, kvart, kvint) között. Alaphangnak a gitár legalsó, legvastagabb húrját, az E húrt választottuk:

| | $\lambda$ | $\nu$ |
|---|---|---|
| alaphang (E) | $\lambda_0$ | $\nu_0$ $(= 164{,}8\ \mathrm{Hz})$ |
| kvart (A) | $\frac{3}{4}\lambda_0$ | $\frac{4}{3}\nu_0$ $(= 219{,}7\ \mathrm{Hz})$ |
| kvint (H) | $\frac{2}{3}\lambda_0$ | $\frac{3}{2}\nu_0$ $(= 247{,}2\ \mathrm{Hz})$ |
| oktáv (e) | $\frac{1}{2}\lambda_0$ | $2\nu_0$ $(= 329{,}6\mathrm{Hz})$ |

A következőkben válasszuk alaphangnak az egyvonalas c hangot. Mint az előzőekből látható volt, ennek a kvintjét úgy kaphatjuk meg, hogy a c hang frekvenciáját $3/2$-del szorozzuk. Így nyerjük az egyvonalas g hangot. Ennek a kvintjét ismét egy $3/2$-es szorzással állíthatjuk elő. Ez lesz a kétvonalas d hang. Az eljárást folytatva az a, e, h, fisz, cisz, gisz, disz, aisz, fiszisz $(=\mathrm{f})$ és c hangokat kapjuk. Látható, hogy az eljárásunk segítségével, kvintugrásokkal előállítottuk az európai zenében előforduló összes hangot. Szokás ezt a lépéssorozatot a kvintkörön ábrázolni.




A nyilak iránya a frekvenciák $3/2$-del való szorzását jelzi. A tizenkettedik ugrás után az alaphang egy oktávjához jutottunk vissza.

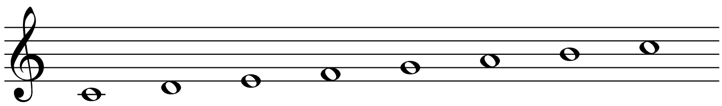
Valóban megkaptuk az alaphang valamelyik oktávját? A frekvenciákat $3/2$-del szorozgatva előállítható az oktáv (melyet az alaphang kettővel való szorzásával nyerhetünk)?

$$\nu \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n \stackrel{?}{=} \nu \cdot 2^k$$

Az egyenlőség igaz lehet? Természetesen nem, hiszen $2^p \neq 3^r$. A hiba viszont olyan elenyésző, hogy – néhány kiváló zenésztől eltekintve – mindenki élvezni fogja így is a muzsikát. Részletezve az állítást:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \approx 2^7$$

A kvintugrásokkal felépített skálával nyerhetjük a pitagoraszi hangsort. Ehhez csupán annyit kell tennünk, hogy néhány esetben az egy oktávval lejjebbi hangot választjuk a kapott hang helyett. (Ez a frekvencia 2-vel való osztását jelenti.)



$\nu$ $\quad \frac{9}{8}\nu$ $\quad \frac{81}{64}\nu$ $\quad \frac{4}{3}\nu$ $\quad \frac{3}{2}\nu$ $\quad \frac{27}{16}\nu$ $\quad \frac{243}{128}\nu$ $\quad 2\nu$

Az egyes hangok közötti hangközök így a következőképpen alakulnak:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| c | | d | | e | | f | | g | | a | | h | | c |
| $\nu$ | | $\frac{9}{8}\nu$ | | $\frac{81}{64}\nu$ | | $\frac{4}{3}\nu$ | | $\frac{3}{2}\nu$ | | $\frac{27}{16}\nu$ | | $\frac{243}{128}\nu$ | | $2\nu$ |
| | $\frac{9}{8}\nu$ | | $\frac{9}{8}\nu$ | | $\frac{256}{243}\nu$ | | $\frac{9}{8}\nu$ | | $\frac{9}{8}\nu$ | | $\frac{9}{8}\nu$ | | $\frac{243}{128}\nu$ | |

Az így nyert pitagoraszi hangsor valóban szép hangközöket eredményez egy adott alaphangról kiindulva. A későbbi zenében (barokk kortól kezdve) felmerült az igény, hogy a zenemű közben más hangnembe, egy más alaphangról indított skálába is szeretnének áttérni a zenészek. Ebben a skálában viszont a legtisztább hangközeink (kvart, kvint) nem lesznek már olyan szép konszonánsak, mint az alapskálában. (Pl. a c-ről indított skálában a „végén” csalnunk kellett, hogy az oktávhoz visszatérjünk. Ha példának okául a H hangot vesszük alapul, akkor a csalás miatt most már a kvint sem lesz tiszta konszonáns…)

Bach idejében ezt az eltérést egy Zarlino nevű zenetudós megelőző kutatásai alapján úgy oldották meg, hogy az alaphang és oktávja közötti részt 12 teljesen egyforma hangközre bontották fel. A kérdés az volt, hogy mi lehet az a szám, mellyel 12-szer megszorozva az alaphang frekvenciáját, az oktávhoz jutunk. Matematikailag felírva

$$2\nu_0 = x^{12} \cdot \nu_0$$

egyenlet megoldását jelenti. $x = \sqrt[12]{2}$ lesz ez a szám, mellyel két egymás melletti hangközt (kis szekundot) előállíthatjuk. A kvint most nem lesz olyan szép, konszonáns hangköz, hiszen

$$\frac{3}{2} \cdot \nu_0 = \left(\sqrt[12]{2}\right)^7 \approx 1{,}4983 \cdot \nu_0,$$

de az eltérés elhanyagolható talán. A hangszereinket ma így hangolják (temperált skála), s a parányi eltérések kiküszöbölésére a zenész hivatott.

Kezdő tanár koromban is szívesen forgattam Sain Marci bácsi matematikatörténeti könyvét, a Nincs királyi utat. Szeretettel ajánlom tanítványaimnak ma is, ezt a ma már csak könyvtárban fellelhető remekművet. A cikk e művel való „összecsengése” tehát nem a véletlen műve, kedvenc irodalmam volt ez a könyv.

A rövid írás figyelemfelkeltő szeretne csupán lenni, minden teljességre, részletre való törekvés nélkül. Az előadás szűkre szabott ideje (30 perc) is hasonlóképpen ízelítőt kívánt adni a zeneelméletről, s a benne rejlő matematikáról, fizikáról. Igyekeztem, hogy e hatalmas anyagban minden korosztály számára legyen a matematikaórákhoz kapcsolódó érdekes kitekintés. Kérem, hogy mindenki kedvére folytassa a kísérletezést, s a zene matematikai felfedezéseit.

*Székely Péter*

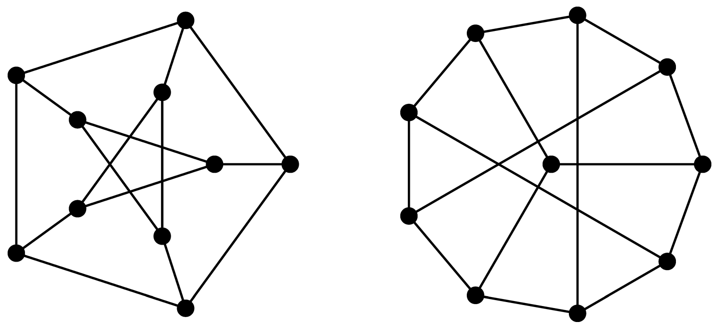
*Székely Péter a budapesti Eötvös József Gimnázium matematika, fizika és informatika szakos tanára. Gyermekkora óta zenél, elvégezte a budapesti Bartók Béla Zeneművészeti Konzervatóriumot, s ma is örömmel muzsikál zenésztársaival (Triola Fúvósegyüttes). Zeneszeretetét igyekszik gyermekeinek, tanítványainak is átadni.*

# Babai és a gráf-izomorfizmus probléma
## (2017. március, Tudomány – történet – Mi is...?)

Gráfnak nevezünk egy olyan $X$ struktúrát, ahol adott a pontok egy $V$ halmaza, valamint élek (azaz pont-párok) egy $E$ halmaza. A gyakorlatban előforduló véges gráfok közül az egyik legismertebb a Facebook-gráf (itt az élek a Facebook-ismerősök között futnak).

A gráf-izomorfizmus probléma (röviden IZO) a következő számítási feladat: Döntsük el, hogy két adott véges gráf, $G$ és $H$ valójában ugyanaz-e, még akkor is, amikor máshogy néznek ki. Azaz döntsük el, hogy van-e olyan bijekció a csúcshalmazok között, amely megőrzi az éleket. Általánosabban azt is vizsgálhatjuk, hogy két adott kombinatorikus struktúra valójában ugyanaz-e. Számos ilyen jellegű probléma visszavezethető az IZO problémára.

Ez egy olyan, egyszerűen megfogalmazható probléma, amit rendkívül nehéz megoldani. Például, mint az alábbi ábra mutatja, a Petersen-gráfot is nagyon különböző módokon lehet ábrázolni.



A fenti ábrán 10-pontú gráfok szerepelnek. Képzeljük el, milyen nehéz lehet eldönteni, hogy két $10^{100}$ pontú gráf izomorf-e. Nyilvánvaló, hogy egy ilyen problémát csak nagyteljesítményű géppel lehet megoldani. És még egy ilyen számítógépet használva is valamilyen nagyon gyors algoritmusra van szükségünk. A probléma elméleti jellegű. Léteznek ravasz eljárások arra, hogy mondjuk $10^{10}$-nél kevesebb pontú gráfokat megkülönböztessünk egymástól ([1]).

Babai László 2015 novemberében egy háromrészes chicagói előadássorozatában jelentette be, hogy kvázipolinomiális algoritmust talált az IZO probléma megoldására. (Egy algoritmust kvázipolinomiálisnak nevezünk, ha futási ideje $\exp\big((\log n)^c\big)$, ahol $n$ a vizsgált gráfok pontszáma és $c$ egy abszolút konstans. Például $c = 2$ esetén $n^{\log n}$, ami egy kicsivel rosszabb mint $n^k$, ami polinomiális). Ezt az eredményt a matematikus társadalom mint az évtized legnagyobb számítógéptudományi áttörését ünnepelte. Babai bizonyítását egy 90 oldalas kézirat formájában ([2]) az arxiv.org oldalon tette közzé. Nyilvánvaló, hogy egy ilyen bonyolultságú bizonyítás ellenőrzése sokáig tart. Többen olvastak részeket a kéziratból, és kisebb, gyorsan javítható hibákat találtak.

Harald Helfgottot felkérték, hogy a nevezetes Bourbaki-szemináriumon tartson előadást Babai eredményéről. Több hónapos ellenőrző munka után Helfgott szilveszter éjjelén komoly hibát talált. Ezt Babai egy hét intenzív munkával kijavította, egyben egyszerűsítve a bizonyítást. Paradox módon mindez lényegesen növeli az eredmény elfogadottságát. Részben azért, mert Helfgott időközben megtartott párizsi előadásán határozottan kijelentette, hogy a módosított bizonyítás már jó. Mindezekről további információ és a javítás részletes leírása Babai honlapján, illetve Helfgott áttekintő cikkében ([3]) található.

Miért olyan fontos Babai eredménye? Mert ezzel a megoldással mélyebben megérthetjük a számítógéptudomány lényegét. A gráf-izomorfizmus probléma algoritmikus bonyolultsága az algoritmuselmélet egy, már Cook 1971-es klasszikus dolgozatában ([4]) is említett nyitott problémája. Ez a probléma különleges szerepet játszik az algoritmuselméletben. A legtöbb ismert, eldöntendő (igen–nem választ váró) probléma vagy a könnyű, azaz polinomiális időben megoldható vagy a nehéz, úgynevezett NP-teljes problémák közé tartozik. Ezekből a nehéz problémákból több ezret ismerünk, az egyik legismertebb annak eldöntése, hogy van-e egy gráfban Hamilton-kör, azaz egy olyan kör, amely a gráf minden pontján áthalad.

Ahhoz, hogy a fentieket jobban megértsük, néhány alapvető fogalommal kell megismerkednünk az algoritmikus bonyolultság elméletéből. A matematikában, illetve az elméleti számítógéptudományban egy algoritmus hatékonyságát az összes lehetséges inputot vizsgálva becsüljük. Azaz egy IZO algoritmus futási ideje a leghosszabb futási idő az összes lehetséges $n$ pontú $G$ és $H$ gráfpárra. Egy problémát NP-belinek nevezünk, ha polinomidőben megoldható egy nemdeterminisztikus Turing-gépen. Informálisan, ha bármely valahogyan megtalált megoldásról (mint például egy gráfban egy Hamilton-kör vagy a $G$ és $H$ gráfok között megadott izomorfizmus) polinomidőben ellenőrizhető, hogy valóban megoldás-e.

Meglepő módon az NP osztályban léteznek legnehezebb problémák, ezeket nevezzük NP-teljesnek. Bármelyik NP-teljes probléma polinomidejű megoldása az összes többi polinomidejű megoldásához vezetne. Hogy van-e ilyen polinomidejű algoritmus, az a Clay Matematikai Intézet listáján szereplő „P versus NP” probléma (ahol tehát P a polinomidőben megoldható, NP a polinomidőben ellenőrizhető problémák halmaza). Ennek megoldásáért egymillió dolláros jutalom járna. A probléma mai állásáról Aaronson írt nemrég áttekintő cikket ([5]).

A gráf-izomorfizmus probléma egyike a nagyon kisszámú ismert természetes problémának, amelyről nem ismeretes, hogy NP-teljes lenne, de amelynek megoldására nem ismert polinomidejű algoritmus sem. Egy másik ilyen nevezetes probléma a prímfaktorizáció, azaz egy természetes szám prímszámokra való gyors felbontásának kérdése. A probléma NP-beli, egy megadott felbontásról gyorsan el lehet dönteni, hogy jó-e valójában. A jelenleg ismert leggyorsabb algoritmus erre a problémára ugyanúgy mérsékelten exponenciális ($\exp(n^{1/3})$ körüli) mint a korábbi legjobb algoritmus az IZO probléma megoldására.

Matematikailag a két problémának kevés köze van egymáshoz. De Babai áttörése egy pszichológiai korlátot is áttört, és várható, hogy most sokan nekiveselkednek a prímfaktorizációs probléma megoldásának. Ha erre valaki igazán gyors algoritmust talál, az a kódoláselmélet számára elég nagy csapás lesz. A ma általánosan használt gyakorlati kriptográfia arra épül, hogy a prímfaktorizációt nem tudjuk megoldani a gyakorlatban, még nagy teljesítményű számítógépekkel sem. Egy elméleti áttörés ebben a témában alapvetően változtathatja meg, hogy például a különféle titkosszolgálatok, illetve a bankok mit tartanak biztonságos kódolási módszernek.

Babai eredménye a gráf-izomorfizmus problémát az exponenciálishoz közeli bonyolultságú problémák közül a majdnem polinomiális bonyolultságú problémák közé helyezi. Korábban Eugene Luks talált polinomidejű IZO algoritmust a korlátos fokú gráfokra. Azaz egy olyan algoritmust, amelynek futási ideje $n^{c(D)}$, ahol $D$ egy felső korlát a vizsgált gráfok maximális fokára. Algoritmusa lényeges módon épít véges csoportelméleti eredményekre. A korábbi legjobb általános algoritmus, amelyet Luks talált 1983-ban, mérsékelten exponenciális futási idejű volt. Valójában Babai egy, a gráf-izomorfizmus problémánál általánosabb, az algoritmikus csoportelmélethez tartozó problémát old meg. Ez a színezett halmazok $G$-izomorfia problémája:

*Legyen $G$ egy, az $R$ halmazon ható permutációcsoport ($G$-t a generáló permutációk egy halmaza segítségével adjuk meg). Ha adott az $R$ halmaz két színezése, akkor az a kérdés, hogy a két színezés egymásba $G$-beli elemmel átvihető-e.*

Könnyen látható, hogy az IZO ennek a problémának speciális esete. Tekintsük ugyanis a $\mathrm{Sym}(n)$ csoport hatását a rendezetlen párok $R$ halmazán. Ez egy $\binom{n}{2}$ fokú $G$ permutációcsoport. Egy $n$ pontú $X$ gráfnak természetes módon megfelel az $R$ halmaz egy 2 színnel való színezése. Az IZO megoldásához elég a fenti $G$ csoportra megoldani a színezett halmazok $G$-izomorfia problémáját.

Babai eredeti bizonyítása használja a Véges Egyszerű Csoportok Osztályozását (amelynek bizonyítását 10 000 oldalra becsülik). Pontosabban, felhasználja az úgynevezett Schreier-sejtést, mely szerint a véges egyszerű csoportok külső automorfizmuscsoportja feloldható. Ez a klasszifikációs tétel egy elegáns egymondatos következménye.

Jelen cikk szerzőjének sikerült ezt a mondatot egy másik, pár oldalon elemien bizonyítható mondatra kicserélni ([6]), amelynek felhasználásával Babai algoritmusának egy gyengébb, de még mindig kvázipolinomiális változata adható meg.

Természetes kérdés, hogy van-e polinomiális algoritmus az IZO problémára. A Babai által használt módszerek, mint például a felhasznált csoportelméleti állítások azt jelzik, hogy egy ilyen algoritmus megalkotásához alapvető új ötletekre van szükség. Az azonban most már nagyon valószínűtlen, hogy a gráfizomorfizmus probléma NP-teljes legyen. Ahogy Babai cikkében ([2]) megjegyzi, ez esetben minden NP-beli probléma megoldására létezne kvázipolinomiális algoritmus.

## Irodalomjegyzék

[1] B. D. McKay, A. Piperno: Practical Graph Isomorphism, II, arXiv: 1301.1493, 2013.

[2] L. Babai: Graph Isomorphism in quasipolynomial time. arXiv:1512.03547, 2015.

[3] H. A. Helfgott: Isomorphismes de graphes en temps quasi-polynomial. arXiv:1701.04372, 2017.

[4] S. A. Cook: The complexity of theorem proving procedures, Proc 3rd ACM STOC (1971), 151–158.

[5] S. Aaronson: $P \stackrel{?}{=} NP$, kézirat Scott Aaronson „Shtetl-Optimized” cimű blogján.

[6] L. Pyber: A CFSG-free analysis of Babai's quasipolynomial GI algorithm. arXiv:1605.08266, 2016.

[7] E. M. Luks: Isomorphism of graphs of bounded valence can be tested in polynomial time. J. Comput. Syst. Sci. 25 (1982), 42–65.

*Pyber László*
*Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet*

*Pyber László magyar matematikus, az MTA tagja. Erdős-száma 1. 2017-ben ERC Advanced Grant-et nyert. Legismertebb eredménye a Szabó Endrével közös szorzattétele, amelyet 2010-ben gyakorlatilag egyszerre, de egymástól függetlenül hoztak nyilvánosságra a Fields-érmes Terence Taóval és munkatársaival. Ennek a csoportelméleti tételnek messzemenő következményei vannak a nemkommutatív számelméletben.*

## Gödel nemteljességi tételei: értelmezések és félreértések (2017. június, Könyvespolc – ajánló)

Történt egyszer, a városi legenda szerint, hogy Esterházy Péter a megjelenése után erősen dicsérte Raymond Smullyan, Gödel nemteljességi tételei című könyvét,[1] amit ugyanúgy Csaba Ferenc fordított, mint Torkel Franzén azonos című (de más alcímű) kötetét. Fel is töltötték Smullyan munkájával az Írók Boltjának polcait, és a kötet abban az évben a literátus emberek sokaságának került a birtokába. Pedig Smullyan könyve néhány rövid szakaszt leszámítva szinte csak matematikusok számára fogyasztható, szemben Franzénével, hiszen ez utóbbi kötet minden érdeklődő számára szánt érthető olvasmány. Főként arról szól ez a tanulmány, hogy Gödel első és második nemteljességi tételének a népszerűsítő irodalomban szereplő interpretációi milyen értelemben tekinthetők helyesnek, vagy hol váltanak át parttalan fantáziálásba, elfeledkezve arról, hogy ezek a tételek mindenféle interpretáció nélkül, önmagukban is érdekes állításokat tesznek a matematikáról.[2]

Torkel Franzén (1950–2006) már nincs köztünk. A nemteljességről írott könyve megjelenésének évében daganatos betegséget diagnosztizáltak nála, és néhány hónap múlva elhunyt, betölthetetlen űrt hagyva a matematikafilozófiát művelők világában. A Luleåi Műszaki Egyetemen, a Számítógép-tudományi Tanszéken dolgozott és a Stockolmi Egyetemen doktorált ([7]). Franzénról nem lehet beszélni anélkül, hogy ne beszélnénk Dag Prawitzról (1936–) és Prawitzról pedig nem lehet beszélni, anélkül, hogy ne beszélnénk Gerhard Gentzenről (1909–1945), ezért néhány szóban bemutatjuk azt a logikafilozófiai közeget, amelyben ők alapvető szerepet játszanak.

Gentzen, szemben a matematikai logikában ma is szokásos móddal, amely sok axiómával és kevés levezetési szabállyal dolgozik, olyan rendszert javasolt, amelyben sok a levezetési szabály, és nincsenek (logikai) axiómák. Az ilyen

[1]Raymond Smullyan, Gödel nemteljességi tételei, TypoTeX, ford.: Csaba Ferenc, (1999), 2005 https://www.typotex.hu/book/196/raymond_smullyan_godel_nemteljessegi_tetelei

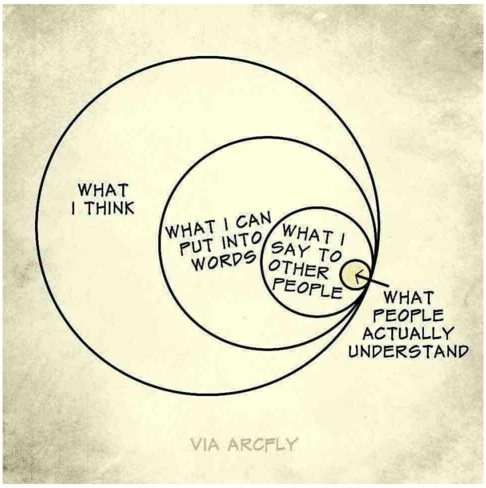
[2]Gödel első nemteljességi tétele azt mondja, ki, hogy a formális-axiomatikus számelmélet minden ellentmondásmentes, az emberi elme által áttekinthető axiómákkal történő bővítése olyan, hogy abban megfogalmazható egy olyan számelméleti állítás, amely se nem bizonyítható, se nem cáfolható az axiómák alapján. A második tétel pedig azt mondja ki, hogy ugyanebben az axiómarendszerben az axiómarendszer ellentmondás-mentességét megfogalmazó számelméleti állítás nem bizonyítható.

Torkel Franzén 2004-ben, Örnvikben egy konferencián
(Forrás: http://www.sm.luth.se/csee/csn/Ornvik2004Photos/)

rendszereket természetes levezetési rendszereknek nevezzük. Az elnevezés indoka a következő egyszerű gondolaton alapul. A logikai konnektívumokhoz („és”, „vagy”, „ha, ... akkor, ...”, ...) bevezetési és kiküszöbölési szabályokat rendel. A bevezetési szabályok olyanok, amelyek azt mondják meg, hogy egy logikai konnektívumot tartalmazó mondatra milyen körülmények között lehet következtetni. A kiküszöbölési szabályok pedig azt mondják meg, hogy ha egy mondatban egy logikai konnektívum szerepel, akkor ebből milyen következtetéseket lehet levonni. Például a legegyszerűbb: $A$ és $B$ együttes állítása alapot ad arra, hogy következtethessünk $A\&B$-re (ez az &, azaz az „és” bevezetési szabálya); $A\&B$ állítása alapot ad arra, hogy akár $A$-ra, akár $B$-re következtethessünk. Hozzávetőlegesen ilyen egyszerűek, ilyen természetesek a természetes levezetési rendszer szabályai. Vegyük észre, hogy amikor az imént az „és” értelméről beszéltünk, akkor nem beszéltünk semmilyen értelemben az „igaz”, illetve „hamis” értékről. Mi több, az „axióma” kifejezést sem használtuk. Ezeknek a szemantikai fogalmaknak mindenfajta használatát Gentzen elkerülte.

Dag Prawitz
(Forrás: https://www.su.se/polopoly_fs/1.208171.1414162636!/image/image.jpg_gen/derivatives/person_260/image.jpg)

Prawitz Gentzennek egyetlen félmondatát helyezte a vizsgálódásai középpontjába: „a bevezetési szabályok igazolják a kiküszöbölési szabályokat". Ha ugyanis abban a helyzetben vagyunk, hogy állíthatjuk $A\&B$-t, akkor ez csak úgy lehetett, ha magát $A$-t és $B$-t is állítottuk, azaz a kiküszöbölési szabályra egyáltalán nincs szükség. Az a tény, hogy a logika következtetési szabályai között ilyen mélyebb kapcsolat állhat fenn, szöget ütött Prawitz fejében. A levezetés, a bizonyítás a matematikai megismerés folyamatában lényegesebb és világosabb szerepet játszik, mint az, hogy egy matematikai állítás „igaz". A matematika érvényes állításainak elkülönítésében és értelmük feltárásában a levezetés játszik alapvető jelentéselméleti szerepet, konkrétan pedig Prawitz arra az álláspontra helyezkedett, hogy a matematika jelentéselmélete rokonítható az analitikus nyelvfilozófiában használatelméletnek nevezett állásponttal. Gentzen félmondatán elgondolkodva Prawitz még arra is megkísérelt választ adni, hogy milyen jellegzetességekkel bír a matematikai nyelvnek ez a használatelméleti szemantikája. A matematikai kifejezések jelentése csak olyasmi lehet, amit kommunikálni lehet. Amit nem lehet megfogalmazni, közös és általános tudományos diskurzus tárgyává tenni, az nem lehet a jelentés része. Nincs értelme azon jelentésrészeknek, amelyekről ugyan az egyes szereplők külön meg vannak győződve, de nem tudnak beszélni róla. Jól ábrázolja ezt a jelenséget az alábbi mém: eszerint a szociálkonstruktivista felfogás szerint a legbelső pici körben lévő szakmai kommunikációra alkalmas mondanivaló az, ami a voltaképpeni (objektív) matematikát alkotná ([6]).




(Forrás: https://i.redd.it/kjzif39rsg7z.jpg)

Hogyan érhető tetten ez a szemlélet Franzénnál? Franzén doktori témavezetője Prawitz volt, és mindenestül magáévá tette azt a személetet, mely képes elrugaszkodni nemcsak az „igaz” és „hamis” használatától, de még a halmazelmélettől is. Képes tehát arra is, hogy a gyakorló matematikusok között általános halmazelméleti realizmusnak nevezett világnézettől eltérő módon szemlélje a matematikát, például ne hivatkozzon a véges Neumann-rendszámok $\omega$ halmazára, mely végső soron nem más, mint amit a középiskolában a természetes számoknak neveztünk.[3] Ne feledjük el, hogy ezt mindenféle tudományos inkorrektség nélkül megteheti, mert a matematikáról való gondolkodásnak is megvannak a maga tudományos módszerei, amelyeket éppen olyanok fektettek le, akik maguk is kiváló matematikusok voltak, gondolok itt David Hilbertre, Alfred Tarskira, Neumann Jánosra vagy Kurt Gödelre. Nos, Franzén, amikor a Gödel-tétel félreértelmezéseiről beszél, nagyon alaposan részletezi és mindkét oldalról (a halmazelméleti realizmus és a használatelmélet szempontjából is) megvilágítja a téve-

[3] Szűk értelemben véve, azaz a számelmélet kontextusában a halmazelméleti realizmus olyasmit jelent, hogy a számokat azonosítjuk a véges Neumann-rendszámokkal. A szokásos halmazelméleti felépítésben az üres halmaz felel meg a 0-nak, az üres halmazt tartalmazó egyelemű halmaz az 1-nek, ez utóbbi kettőt tartalmazó kételemű halmaznak a 2, és így tovább. Ezeknek a halmazoknak a halmazát nevezzük a véges Neumann-rendszámok halmazának és $\omega$-val (omegával) jelöljük.

dések okát és esetleges javíthatóságát. Ez mindenképpen olyan unikális eljárás, mely sok élvezetet fog okozni azoknak is, akik már találkoztak a témával. Ráadásul hű a Gödel-tételkör megalkotóihoz is, akik még képben voltak Hilbert és Gentzen informális matematikafelfogását illetően.

Ha az ember figyelmesen olvassa a könyvet, akkor arra a következtetésre juthat, hogy Franzén, amellett, hogy nagyon széles perspektívát nyújt a tétel értelmezéseiről, megfogalmaz egy matematikafilozófiai tézist is, és ezt a tanulmányában központi helyre pozicionálja. A következő meglepő állítást teszi a formális-axiomatikus számelméletre, azaz a Peano-aritmetikára (PA) vonatkozóan:

> Másképpen: csupán a „PA konzisztens” és a „PA-ban bizonyítható az ikerprím sejtés” állítások alapján nem következtethetünk arra, hogy végtelen sok ikerprímpár létezik. (58. o.)

Illetve, amit többször is említ, és ami a (matematikai logikusok számára igen meglepő) tézise lenne:

> A nemteljességi tétel konkrét példával szolgál olyan *konzisztens elméletekre, amelyekben hamis állítások is bizonyíthatók.* (42. o.)

Hangsúlyozom, hogy Franzén nem áll a halmazelméleti realizmus talaján, tehát ezen nem azt érti, hogy valamely számelméleti állítás nem igaz $\omega$-ban, hanem hogy egy más értelemben nem igaz.[4] Itt valami olyanról beszél, ami a formális nyelvekkel kapcsolatos igazsághoz és bizonyításhoz köthető, de nem feltétlenül a halmazelmélethez. Először egy nagyon gyenge érvet fogok az állítása mellett felhozni, majd megpróbálok rámutatni arra, hogy Franzénnak, amennyiben fenntartja az állítását, miért kell mégiscsak a halmazelméleti realizmust elfogadnia.

A gyenge (de legalább jó) próbálkozás Franzén tézisének igazolására a következő gondolatkísérlet. Először is a formális rendszerek formális állításai formális bizonyításainak létezése nem feltétlenül vonja maga után, hogy az állítás „a valóságban is igaz”. A legegyszerűbb példa a Ramsey-tétel egy véges változata, mely tulajdonképpen teljesen mindegy, hogy mit mond ki – a skatulyaelv egy

[4]Lásd a 3. lábjegyzetet.

általános verzióját –, a lényeg, hogy PA-ban megfogalmazható, de nem vezethető le belőle.[5] Azt a tényt, hogy a véges Ramsey-tétel ezen verziója (nevezzük VRT-nek) nem vezethető le PA-ból, Paris–Harrington-tételnek hívjuk, tehát ez egy matematikai logikai tétel ([5]). A halmazelméletben (mondjuk $\omega$ elemeire) VRT bizonyítható. Most nem arra szeretném felhívni a figyelmet, hogy ez milyen érdekes, hanem a másik szemszögből közelíteném meg a problémát. Tegyük fel, hogy azok, akik kitalálták a PA-t, nem szándékozták a VRT-t igaznak tekinteni, mert mondjuk olyan bonyolultnak tartották, hogy nem hittek benne. Éppen ezért úgy alakították ki PA axiómarendszerét, hogy abból a VRT-t ne lehessen levezetni. Mivel nem hittek benne, nem is tartották igaznak. És valóban, VRT nem is levezethető PA-ból. Ám az a helyzet, hogy a VRT már az úgynevezett másodrendű aritmetikában, a PA2-ben is levezethető. PA2-ben beszélhetünk a természetes számok részhalmazainak konkrét halmazairól is, ami szintén olyan tevékenység, amit korábban nem feltétlenül szerettek volna a számokkal foglalkozók (gondolok itt Eukleidészre, vagy a skatulyaelvre utaló első szerzőre, Jean Leurechon jezsuita szerzetesre, esetleg magára Giuseppe Peanora), ezért nem meglepő, hogy egy olyan eredmény is kijött, melynek az igazsága eredetileg nem volt kívánatos. Ekkor tehát azt mondjuk, hogy ha PA2 ellentmondásmentes, akkor belőle egy nem szándékolt, hamis állítás is levezethető, ti. a VRT. Természetesen ez egy gondolatkísérlet. A feltevéssel szemben Eukleidészék semmit sem gondoltak a VRT-ről és a mai matematikusok azt gondolják, hogy a VRT bizonyítottan igaz. Elképzelhető azonban, hogy egy ilyen megtörténjen, tehát nem kizárt, hogy egy konzisztens formális rendszer ebben az értelemben vett hamis állítást bizonyítson.

Nagyon érdekes tehát, hogy Franzén nem mindig a halmazelméleti igazságra, hanem egy bővebb rendszerre, mondjuk a $PA_2$-ra vagy más érdekesebb elméletekre hivatkozik. S mivel ezt rendkívül olvasmányosan teszi, ezért ezek a gondolatmenetek akár a matematikában csak középiskolai szinten járatos, akár a magasabb szinten tájékozott olvasónak örömére és tanulságául szolgálhat. Vannak azonban olyan részei a könyvnek, amelyek a matematikai logika területén erősen iskolázott olvasó számára is kihívást jelentenek, de ezek a részek nem gyakoriak,

[5] A véges Ramsey-tétel ezen verziója a következő. Minden pozitív egész $n, k > 1$, ill. $m > n-1$ számhoz található olyan $N$ pozitív egész szám, hogy ha kiszínezzük a $H = \{1,2,3,\dots,N\}$ halmaz összes $n$-elemű részhalmazát $k$ színnel, akkor lesz $H$-nak olyan $K$ részhalmaza, mely legalább $m$ elemet fog tartalmazni úgy, hogy $K$-nak minden $n$-elemű részhalmaza azonos színből fog állni, és $K$ elemeinek száma legalább annyi, mint $K$ elemei közül a legkisebb.

és főleg a fent említett – a matematikai igazsággal kapcsolatos – téziséhez kapcsolódnak.

Azt mondja ugyanis Franzén, hogy egy $A$ formális matematikai állítás igaz, ha az, amit $A$ állít (mond, kifejez, megfogalmaz), a valóságban is úgy van. Ezt nagyon helyesen Alfred Tarskira hivatkozva teszi, melyet *Tarski-féle T-sémának* nevezünk:

> Alfred Tarski a múlt század 30-as éveiben mutatta meg, miként adható meg az igazság matematikai definíciója úgy, hogy az „$A$ igaz" állítás ekvivalens legyen $A$-val. Tarski elméletét ebben a könyvben nem tárgyaljuk részletesen. (59. o.)

Nos, ez az utóbbi elég helytelen dolog, mert Tarski nem hallgatott el egy lényeges problémát ([8]). Azt, hogy ez az elv ugyan sokszor megvalósítható, de konkrétan a formális-axiomatikus számelmélet esetén nem. Ott, a PA-ban, éppen az a helyzet, hogy van olyan $A$ formális számelméleti kijelentés, melyet lefordítva természetes nyelvre (megnézzük mit mond valójában), a természetes nyelvi fordítása ekvivalens lesz azzal, hogy $A$ hamis. Ez ugyanannak a jelenségnek a következménye, ami a Gödel-tételben is tapasztalható, csak nem a bizonyíthatóságra, hanem az igazságra vonatkozóan ([4]). Természetesen vannak nagyon egyszerű formális állítások, melyeknek az igazsága problémamentes. Így például az $1+1=2$ kijelentés pontosan akkor igaz, ha egy meg egy az kettő. De sokkal bonyolultabb állítások esetén a matematikai logikusoknak olyan tulajdonságokat kell megkövetelniük a számelmélet nyelvén felírt axiómarendszerekre vonatkozóan, amelyek legalább a formális állítások egy körére biztosítják, hogy ezeknek az igazsága ekvivalens legyen a természetes nyelvi fordításukkal. Az ilyen megszorítások azonban hivatkoznak $\omega$-ra. Tehát vagy elfogadjuk a halmazelméleti realizmust vagy egyszerűen nem hivatkozunk az igazságra. Ezen kívül is vannak még megoldások, amelyekkel matematikafilozófusok éltek (akár David Hilbert ([9]), akár Michael Dummett ([3])), de ezek a megoldások nem olyan egyszerűek, hogy egy olyan megnyugtató mondatba lehessen megfogalmazni, mint amilyen a Tarski-féle T-séma.[6] Sajnos ingatag lábakon álló téziséből

[6]Franzén a gondolatmenetében a 42. oldalon elfeledkezik arról, hogy Tarski feltette, hogy amikor a természetes nyelvben megfogalmazunk egy matematikai elméletet, akkor ott ugyanazokat a matematikai axiómákat kell megkövetelnünk, mint amelyeket a formális elméletben

messzemenő következtetéseket von le, például azt, hogy ellentmondásmentes elméletből hamis állítás is levezethető. Szerintem ez nem csak szokatlan, de hamis állítás is. Egy szó, mint száz, remélem, hogy az Olvasó is a Franzén és a köztem lévő nézetkülönbségben egy izgalmas diskurzus lehetőségét látja.

A könyvnek van egy nagyon figyelemre méltó része, mely a Gödel-tétel és az algoritmusok, a kiszámíthatóság kapcsolatát vizsgálja. Ezt együtt tárgyalja a Gödel-tétel és a diofantoszi egyenletek kapcsolatával, amely a középiskolai tudáshoz sokkal közelebb lévő fogalmakkal meséli el ezt a témakört. Ez a két átfogalmazás, a számítógépes interpretáció és a számelméleti egyenletek nyelvén elmondott történet azok számára is sokat mond, akik az egyetemen már találkoztak a Gödel-tételekkel, ritkaság ugyanis, hogy a matematikai logikai képzésben kitérnének arra, hogy milyen kapcsolat van a diofantikus egyenletek és a nemteljességi tételek között. Aki esetleg a könyv elejét magasabb matematikai műveltsége miatt unalmasnak találja, az is nagyon sok élvezetes és új gondolatmenetet találhat a kiszámíthatóságról szóló fejezetekben.

Csaba Ferenc fordítása szakmailag rendkívül megnyugtató. Régi jó ismerős ő logikai tárgyú könyvek és cikkek fordítása terén és nyelvhasználatban, szakmaiságban nem tud tévedni. Hogy csak egy alapvető tényt mondjak: *A matematika filozófiája a XXI. század küszöbén* c. gyűjteményes kötet, melynek ő a szerkesztője és a benne lévő cikkek közül néhánynak fordítója, elengedhetetlen a magyarországi matematikafilozófiai képzésben ([1]). Két egyetem (a BME és az ELTE) egészen biztosan használja matematikafilozófiai népszerűsítő és professzionális kurzusain is. Összességében annak is örülhetünk, hogy Franzén könyve a kezünkbe kerülhet, de annak is, hogy ezt Csaba Ferenc kiváló fordításában olvashatjuk.

Torkel Franzén: Gödel nemteljességi tételei Értelmezések és félreértések, TypoTeX, 2013

posztuláltunk (különben a fordítás nyilvánvalóan elromlik). Amikor Franzén áttér egy új axiómarendszerre a ZFC +„ZFC inkonzisztens”-re, akkor elfelejti az új axiómának megfelelő természetes nyelvi axiómát hozzávenni az eddigiekhez. Nehezíti még a problémát, hogy a fordítás ezen a helyen inkonzisztens helyett konzisztenst mond, ami elég erősen igénybe veszi az olvasó figyelmét. Hasonló elütések sajnos még néhány helyen találhatók a szövegben.


## Irodalomjegyzék

[1] Csaba Ferenc, (szerk.), A matematika filozófiája a XXI. század küszöbén. Osiris, Bp. 2003.

[2] Raymond Smullyan, Gödel nemteljességi tételei, TYPOTeX, ford.: Csaba Ferenc, (1999), 2005

[3] Michael Dummett, The philosophical significance of Gödel's theorem, Ratio 5, 140–155. (1963), Reprinted in M. Dummett: Truth and Other Enigmas, Duckworth, London, 1978, 186–201., p. 186.

[4] Gödel, Kurt, On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems, in From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931, ed.: Jean Van Heijenoort, Harvard University Press, 1967

[5] Paris, J. and Harrington, L. A Mathematical Incompleteness in Peano Arithmetic. In Jon Barwise (ed.), Handbook of Mathematical Logic (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics), North-Holland; New edition 1982

[6] Dag Prawitz, Jelentés és bizonyítás: a klasszikus és intuicionista logika konfliktusa in [1]

[7] Solomon Feferman nekrológja a FOM (Foundations of Mathematics) levelezési listán: https://www.cs.nyu.edu/pipermail/fom/2006-April/010463.html

[8] Alfred Tarski, Az igazság fogalma a formalizált nyelvekben, in: Ruzsa I. (szerk.), A. Tarski – Bizonyítás és igazság, Gondolat, 1989

[9] Zach, Richard, The Practice of Finitism: Epsilon Calculus and ConsistencyProofs in Hilbert's Program, Synthese, 137:211-259, 2001.

*Molnár Zoltán Gábor*
*Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem*

*Molnár Zoltán Gábor a BME Algebra és Geometria Tanszékének adjunktusa, kutatási területe a bizonyításelmélet és a matematika analitikus filozófiája. Ez utóbbi témából a hazai aktivitást életben tartó Gödeltől Russellig című a TypoTeX kiadó gondozásában megjelent esszékötet szerzője és szerkesztője. Kognitív tudomány- és mérnökszakos hallgatóival a számítógépes következtetés eszközeit felhasználva az emberi logikai érvelések felismerési jelenségeit vizsgálja.*

# Szabaduló tanterem
## (2018. december, Tanóra – szakkör)

Nagyon szeretek Rátz László Vándorgyűlésekre járni. Minden évben az a nyár egyik fénypontja. Szeretem a társaságot, a szellemi kihívásokat és a rengeteg új ötletet, másfajta megközelítést, amiktől mindig gazdagabbnak érzem a tudásomat az előadássorozat végére. Tátott szájjal hallgattam Számadó László cirkuszi ötleteit és zseniális kivitelezését, nagyon tetszett a Gamification alapú értékelésről szóló előadás és Danka Miklós algoritmikus gondolkodással kapcsolatos ötletei is lenyűgöztek. Csordás Péter Játékos matematika című előadásán is sok új ötletet hallottam, hihetetlenül pörgős, jól követhető előadás volt.

Ezekben az előadásokban volt valami közös. Mindegyik mögött ott áll az a gondolat, ami szinte mindannyiunkat foglalkoztat, hogyan motiváljuk a gyerekeket. Hogyan vegyük rá őket arra, hogy ők maguk, egy belső késztetés miatt akarjanak az órán, sőt azon kívül is dolgozni.

### Elmesélem, milyen trükkökhöz szoktam én folyamodni, ha munkára szeretnék bírni egy osztályt.

Versenyző típus vagyok, mindig is az voltam. Az a típusú ember vagyok, aki nem azt mondja a saját gyerekeinek, hogy gyertek, induljunk, hanem azt: Verseny a kocsiig? Szóval az egész életemet áthatja ez a versenyszellem. Persze tanulókat versenyeztetni mindig szoktam, nagy lelkesen, teljes erőbedobással. De vajon mit kezdhetek azokkal a gyerekekkel, akik nem járnak matek versenyekre? Azon gondolkodtam, hogyan tudnám mégis becsempészni a versenyzést a hétköznapokba.

A versenyzési mániám mellett csoportmunka mániám is van. Nagyon fontosnak tartom, hogy a gyerekek gyakran dolgozzanak csoportban, mert számtalan sok előnye van. Ezeket biztosan mindenki tudja, most nem részletezem. Ezt a két mániámat gyúrtam össze.

Ekkor jött a szuper ötlet, szabaduló szobák. Nem az én ötletem persze, de remekül alkalmazható osztályteremben is. Hisz az egész lényege az, hogy meg kell oldani egy csomó feladatot ahhoz, hogy a végén nyerjünk. Bevittem az iskolába, innen az elnevezés, szabaduló tantermek. Egy ilyen óra felépítése hasonlít az eredeti szabaduló szobákhoz. Van egy kerettörténet, amit az óra elején felolvasok a gyerekeknek. A sztori kitalált, nálam általában meg kell menteni a világot, mert valami megtámadott minket. Ha 40 perc alatt sikerült, még Chuck Norris is büszke lesz ránk, ami, lássuk be, menő dolog. Kiosztom a feladatokat és kezdődhet a verseny.

A versenyek önellenőrzős versenyek. Minden feladathoz tartozik egy szám, egy úgynevezett titkos kódhoz tartozó első, második... szám. Ez a szám vagy az eredménye a feladatnak, vagy annak valahányszorosa..., vagy az is lehet, hogy ha ezt kaptad, akkor ez a titkos kódhoz tartozó egyik számod, ha meg azt kaptad, akkor meg az. A lényeg, hogy egész számok legyenek. Ha a gyerekek minden feladatot megoldottak, van annyi egész számuk, ahány feladat volt. Ha ezeket a számokat összeadják és az eredménnyel elosztják a feladatsor végén található nagy számot, akkor (feltéve, hogy hibátlanul dolgoztak) egész szám lesz a hányados. Ez a titkos kód.

Ebben nyilván trükköztem, hisz a feladatsor végén álló szám két „nagy” prímszám szorzata, amit nemes egyszerűséggel nem lehet feltörni 40 perc alatt, kiküszöbölve ezzel az egyéb irányú kódfejtéseket. Az egyik az összeadás során kijött szám, a másik a titkos kód.

A versenynél nagyon fontosnak tartom, hogy a gyerekek ne csak egymás ellen versenyezzenek, ne a másikat kelljen legyőzni. Így az óráimon általában vagy az idő ellen versenyeznek, vagy valami közös cél eléréséért.

## Mik a jó közös célok, hisz mindenki másnak örül?

Erre a következő megoldást adtam. Adott egy feladatsor, ha sikerül hibátlanul megoldani, tehát megmentették a világot ☺, minden gyerek 2 ajándékot választhat. Vagy kér egy plusz-t (4 darab egy ötös) vagy kér $+1$ pontot (ezek a pontok dolgozatnál felhasználhatók, ha csak ennyi hiányzik a jobb jegyhez, egy dolgozatnál max. 2 pont vehető igénybe) vagy kér egy cukrot a világ egyik legfinomabb cukrából (ezt én veszem, 1 kg 1000 Ft, sokáig elég). Ez a három ajándék természetesen tetszőlegesen kombinálható.

Hihetetlen izgalmas látni azt is, ki mit választ. A gyerekek törik a fejüket, milyen jó lett volna a múltkori dolinál az a plusz egy pont vagy már van két plusza, ha most kér kettőt, hazavihet ma egy ötöst. Vagy csak egyet kér és akkor még egy cukrot is ehet, úgyis játszunk még ilyet és a cukor tényleg világbajnok. És persze van itt még egy fontos adalék is, ilyenkor a gyerekek élhetnek a szabad választás jogával, ami szerintem szintén nagyon építő és valljuk be, jól is esik a sok kötelező feladat mellett.

## Milyen a jó feladatsor?

Ez már nehéz ügy. Hiszen mindenkinek dolgozni kell, olyat nem lehet csinálni, hogy a legügyesebb mindent megold, a többiek meg „ingyen" ajándékhoz jutnak. Kell tehát egy olyan feladatsor, amit nem tud egyedül megcsinálni még a legügyesebb sem. Illetve persze meg tud, de akkor kicsúszik az időből és senki nem nyer semmit. Többféle módszert is kidolgoztam erre a dilemmára.

### *1. ötlet – Szabaduló szoba, csoportmunkában*

Összeállítok egy 10 feladatból álló feladatsort, mindegyikben három feladat van. A feladatsorban egyre nehezednek a feladatok, az utolsó egy-kettő tényleg nehéz. Ez persze az osztálytól függ, kinek mi a nehéz. A csoportokat én állítom össze. Már előző óra végén jelzem, hogy a következő órán ilyet játszunk és ismertetem a csapatokat, így a gyerekek már összetolt padokkal, csoportokra szétbontva várnak engem a következő óra elején. Ez az ő érdekük, hiszen ha az órán csinálják meg, kevesebb idejük marad, és esetleg emiatt nem sikerül kijutni a szabaduló tanteremből.

Az óra elején mindenkinek kiosztom a feladatokat, minden gyerek minden feladatot megkap. A csoport feladata, hogy szétosszák egymás között a munkát és adott esetben segítsék vagy ellenőrizzék is egymást. És akkor elkezdődik a munka.

Mindig megígérem, hogy nem segítek. Ritkán tartom be. Nagyon egyszerű oka van, iszonyatosan izgulok. Nehéz dolog jó feladatsort összeállítani. Olyat, ami megoldható 40 perc alatt, de nem könnyen. Szóval sétálgatok a teremben és ha valaki nagy bajban van, picit segítek. Sokszor az is elég, ha csak bólintok vagy mosolyogva annyit mondok, jó lesz, csak így tovább.

Akiknek az utolsó szám osztásakor a hányados egész szám, büszkén jönnek és mutatják, hogy kijutottak. És akkor kezdődik a fent említett ajándékválasztás.

Mi értelme van egy ilyen feladatsornak, hisz a gyerekek nagy része csak pár feladattal foglalkozott az óra során?

Erre több válasz is adható. Például, hogy a legügyesebb, amúgy országos bajnok is lássa, ő kevés egyedül, szüksége van akár az osztály leggyengébb tanulójának a munkájára is. Hisz csak együtt sikerülhetett. És ezzel párhuzamosan a gyengék is megélik azt, hogy nélkülözhetetlenek voltak. Ez remek érzés, mindenkinek jól esik.

De van olyan is, hogy azt mondom, az első nyolc feladatból egy feladat benne lesz a TZ-ben, más számokkal. Akkor mindenki megoldhatja az összes feladatot, hisz a feladatsor hazavihető. Sokszor látom, hogy a következő óra elején egymásnak magyarázzák a feladatokat, ami szintén klassz dolog.

## *2. ötlet – Szabaduló szoba, kooperatív csoportmunkában*

Összeállítok egy 25–40 feladatból álló feladatsort, témája válogatja, mikor mennyit. Ebben a feladatsorban is nehezednek a feladatok és itt is minden gyerek megkap minden feladatot. A gyerekek osztják be egymás között, ki melyik feladatot csinálja meg, illetve ki kit ellenőriz. Mindenki lázasan dolgozik. A feladatok eredményeit a táblára írják, aki ellenőrizte, kipipálja, hogy egyértelmű legyen, hogy melyik feladat hibátlan (elméletileg). Miután minden feladatot megoldottak, a megoldás a fenti esetnek megfelelően működik. Összeadják a számokat, elosztják a kapott „nagy” számot az eredménnyel és az így nyert hányados a titkos kód. Ha ez egész szám, sikerrel jártak.

Kicsiknél (5–6. osztály) néha könnyítek, én ellenőrzöm a feladatokat, így fennáll a javítás lehetősége.

Ezek nagyon pörgős órák, hangosak a gyerekek, rohangálnak, beszélgetnek, egymásnak segítenek. Aztán beáll a néma csend, mindenki lázasan dolgozik, majd újra kavalkád és fergeteges ünneplés a végén, ha sikerült.

## Munkabefektetés

Persze rengeteg munka előzi meg az ilyen órákat. Nagyon kell ismerni a csoportot, osztályt, hogy jól eltaláljuk a feladatok mennyiségét és nehézségi szintjét. Ki kell találni vagy össze kell vadászni rengeteg feladatot figyelve arra, hogy az eredmények összege a végén egy nagyobb (legalább négyjegyű) prímszám legyen, beírni a gépbe, mindet hibátlanul megoldani előre, és persze ki kell találni egy fedősztorit is, hogy az óra alaphangulata meglegyen.

Egy ilyen órát előkészíteni legalább 2–3 óra, mégis azt gondolom, megéri. Nagyon élvezik a gyerekek, és rengeteg pozitívuma van a matek feladatok megoldásán felül. Minden ilyen óra végén többen is odajönnek és megkérdezik, mikor játszunk ilyet megint. Pedig ez nem játék, nagyon nem az. Klassz, hogy mégis annak élik meg.

Segítségképp összeállítottam pár feladatsort. Ezeket 16–18 fős csoportok számára ajánlom.

## Szabaduló tanterem – Algebrai kifejezések 8. osztály

Egy szabaduló szobában vagy, a kerettörténet a következő:

Gonosz poliGNÓMok támadták meg a Földet és el akarják pusztítani. Csupán 40 perced maradt, hogy megoldd az alábbi feladatsort, megfejtsd a négyjegyű kódot és bejuss vele a titkos irányító központjukba, amitől ők mindahányan garantáltan szörnyethalnak. Mentsd meg a világot!

**1.** Húzd alá az alábbi kifejezések közül az egyenlőket!

$$2\cdot x\cdot 3\cdot y\cdot x\cdot 5 \qquad 2\cdot x\cdot y^2\cdot 15 \qquad 6\cdot x^2\cdot 5\cdot y$$

$$3\cdot x\cdot y\cdot 5\cdot 2 \qquad \frac{1}{2}\cdot x\cdot 12\cdot xy\cdot 5 \qquad \frac{20\cdot x\cdot 9\cdot y\cdot x}{6}$$

Hány darabot találtál? Szorozd meg a darabszámot 15-tel, ez a kódhoz szükséges **első szám**!

**2.** Számold ki az alábbi kifejezések helyettesítési értékeit, ha $a=\frac{1}{3}$ és $b=-1$!

*a)* $(12a+16b)-(6a-9b)=$

*b)* $(5a^2-3b^2)-[(a^2-2ab-b^2)-(5a^2-2ab-3b^2)]=$

Szorozd össze a fenti két eredményt, ez lesz a kódhoz szükséges **második szám**!

**3.** Bontsd fel a zárójeleket, és végezd el a lehetséges összevonásokat! Határozd meg a kifejezés helyettesítési értékét, ha $a = \frac{1}{2}$!

$$\left(4a^3 - 2a^2 + 5a - 1\right) + \left(-2a^3 + 3a^2 - 11a - 4\right) - \left(3a^3 + a^2 - 6a + 7\right) - 5a =$$

Határozd meg, melyik két egész szám között van a végeredmény! Szorozd össze ezt a két számot, ez lesz a kódhoz szükséges **harmadik szám**.

**4.** Végezd el a következő szorzásokat és vonj össze, ahol csak lehet!

*a)* $(2x+4)(3x+5) =$ *b)* $(x-7)(2-6x) =$

*c)* $2x \cdot (x-11) - 4x \cdot \left(11 + \frac{1}{2}x\right) =$

Add össze az eredményként kapott algebrai kifejezéseket, az összeget szorozd meg 37-tel, így megkapod a kódhoz szükséges **negyedik szám**ot!

**5.** Párosítsd össze a következő algebrai kifejezéseket!

| | |
|---|---|
| $(a+2)^2$ | $a^2 - 4$ |
| | $2a^2 - 4a + 4$ |
| $(2a-1)^2$ | $4a^2 - 4a + 1$ |
| | $a^2 + 4a + 4$ |
| $(a-2)^2$ | $-4a^2 + 2a + 1$ |
| | $2a^2 + 2a + 4$ |
| $(a-2)(a+2)$ | $a^2 - 4a + 4$ |

Add össze azokat a kifejezéseket, amiknek nincs párja. Az így kapott eredmény 19-szerese lesz a kódhoz szükséges **ötödik szám**!

**6.** Pótold a hiányos kifejezéseket úgy, hogy teljes négyzetet kapj!

*a)* $4x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 49$ *b)* $81x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 1$

*c)* $\frac{1}{25}x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 100$ *d)* $\frac{9}{4}x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{16}{9}$

Add össze az általad beírt kifejezéseket és határozd meg az összeg helyettesítési értékét, ha $x = \frac{43}{27}$! Az így kapott szám lesz a kódhoz szükséges **hatodik szám**!

**7.** Oldd meg az alábbi egyenleteket!

*a)* $(2x+3)^2=(x-7)^2+3(x^2+4)$ *b)* $(3x+4)^2-100=9(x-2)(x+2)$

*c)* $(x+9)(2x+14)(8-x)=0$

Szorozd össze a fenti egyenletek minden megoldását, így megkaptad a kódhoz szükséges **hetedik szám**nál 1-gyel kisebb számot!

**8.** Határozd meg, a változók mely értékeire nem értelmezhetők a következő algebrai kifejezések!

*a)* $\dfrac{4y-7}{x+23}$ *b)* $\dfrac{5x-19}{2x-148}$ *c)* $\dfrac{17xy}{x(x-32)}$

Add össze a feladatban szereplő „tilos” értékeket, így megkapod a kódhoz szükséges **nyolcadik szám**ot!

**9.** Oldd meg a következő egyenleteket a racionális számok halmazán!

*a)* $2(x+3)-5(3x-4)=4-2(7-x)$

*b)* $\dfrac{4x-3}{2}=\dfrac{5x+1}{3}+\dfrac{79}{6}$

Szorozd össze a fenti két megoldást, így megkapod a kódhoz szükséges **kilencedik szám**ot!

**10.** Oldd meg a következő egyenletet!

$$x(x+2)-3x(8-x)=2x(x-11)+50$$

A kódhoz szükséges **tizedik szám**, ha nincs az egyenletnek megoldása, akkor 19, ha egy megoldása van, akkor az eredmény duplája és ha két megoldása van, akkor a megoldások összege.

Add össze a fenti feladatok végeredményeit és oszd el ezzel a számmal a 10 887 979 számot!

Ha a fenti feladatokat hibátlanul oldottad meg, hányadosként egy egész számot kapsz.

Ez a szám a titkos kód, amellyel bejutsz a poliGNÓMok irányító központjába. Gratulálok, Te vagy a Földön az egyetlen ember, akire még Chuck Norris is felnéz!

## Feladatok – a négyzetgyökvonás azonosságai, 10. osztály

Egy szabaduló szobában vagy. A kerettörténet a következő:

Egy műkincstolvaj nyomába eredtél, és eljutottál a titkos földalatti kazamata rendszerébe, ahol az ellopott kincseket őrzi. Oldd meg az alábbi feladatokat, hogy megkapd azt a négyjegyű kódot, amivel bejutsz a páncélterembe. Vigyázz, csak 40 perced van rá!

**1.** Számold ki, hogy milyen számjegy áll a következő törtek tizedes tört alakjában a tizedesvessző utáni 2016. helyen!

*a)* $\frac{27}{24}$  *b)* $\frac{31}{6}$  *c)* $\frac{3}{7}$

Add össze a fenti feladatok végeredményeit és ennek a számnak a háromszorosa lesz a kódhoz szükséges **első szám**!

**2.** Döntsd el, hogy mely állítások igazak és melyek hamisak!

*a)* Két racionális szám különbsége mindig racionális szám.

*b)* Két irracionális szám szorzata mindig irracionális szám.

*c)* Egy racionális és egy irracionális szám összege mindig irracionális.

*d)* Van olyan irracionális szám, amelynek a reciproka racionális.

A fenti állítások közül minden igaz állítás 63, minden hamis állítás 27 pontot ér. Add össze a fenti négy állításért járó pontokat, így megkapod a kódhoz szükséges **második szám**ot!

**3.** Határozd meg, melyik két egész szám között van a következő szám: $23-2\sqrt{6}$!

Szorozd össze ezt a két számot, ez lesz a kódhoz szükséges **harmadik szám**!

**4.** Keresd meg és karikázd be az egyenlőket az alábbi kifejezések között!

$$\sqrt{2^2} \qquad \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} \qquad \sqrt{(-2)^2} \qquad \sqrt{\frac{32}{8}} \qquad \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}} \qquad \left(\sqrt{2}\right)^2$$

Számold össze, hány számot karikáztál be! Ennek a tízszerese lesz a kódhoz szükséges **negyedik szám**!

**5.** Végezd el a következő műveleteket!

*a)* $\sqrt{2025} =$ *b)* $\dfrac{\sqrt{147}}{\sqrt{3}} =$ *c)* $\left(\sqrt{5}\right)^3 \cdot \sqrt{5} =$

*d)* $\dfrac{\sqrt{6^8}}{\sqrt{6^4}} =$ *e)* $\sqrt{8^5} \cdot \sqrt{8} =$ *f)* $\sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{32} - \sqrt{2}\right) =$

Add össze a fenti feladatok végeredményeit és ez lesz a kódhoz szükséges **ötödik szám**!

**6.** A műveletek elvégzésével döntsd el, melyik szám a nagyobb!

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{27}} \cdot \sqrt{\frac{6^3}{128} \cdot \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{10}}} \qquad\qquad \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{15^3}{135} \cdot \frac{1}{\sqrt{125}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3^3}}$$

Vedd a kisebb szám ezerszeresét, ez lesz a kódhoz szükséges **hatodik szám**!

**7.** Végezd el a műveleteket!

*a)* $\sqrt{3} \cdot \left(\sqrt{12} + \sqrt{75} - \sqrt{3}\right) =$ *b)* $\left(\sqrt{80} - \sqrt{20} + \sqrt{45}\right) \cdot \sqrt{5} =$

*c)* $\left(\sqrt{23} + \sqrt{7}\right) \cdot \left(\sqrt{23} - \sqrt{7}\right) =$ *d)* $\left(4 \cdot \sqrt{2} + 2\sqrt{7}\right) \cdot \left(4 \cdot \sqrt{2} - 2\sqrt{7}\right) =$

Add össze a műveletek végeredményeit, így megkapod a kódhoz szükséges **hetedik számot**!

**8.** Végezd el a következő műveleteket!

*a)* $\sqrt{7 + \sqrt{24}} \cdot \sqrt{7 - \sqrt{24}} =$ *b)* $\sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{19} + \sqrt{3}} =$

*c)* $\sqrt{\sqrt{31} - \sqrt{6}} \cdot \sqrt{\sqrt{31} + \sqrt{6}} =$ *d)* $\left(\sqrt{2 - \sqrt{3}} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^2 =$

Vedd az eredmények összegének négyszeresét, így megkapod a kódhoz szükséges **nyolcadik szám**ot!

**9.** Számítsd ki a következő kifejezések értékét!

*a)* $\left(\sqrt{6 - \sqrt{11}} + \sqrt{6 + \sqrt{11}}\right)^2 =$ *b)* $\left(\sqrt{10 - \sqrt{19}} + \sqrt{10 + \sqrt{19}}\right)^2 =$

Ha a két eredmény összegét megszorzod 23-mal, megkapod a kódhoz szükséges **kilencedik szám**ot!

**10.** Oldd meg az alábbi egyenleteket!

*a)* $\sqrt{5-\sqrt{x}}\cdot\sqrt{5+\sqrt{x}}=2$ *b)* $\left(\sqrt{8-\sqrt{y}}+\sqrt{8+\sqrt{y}}\right)^2=30$

*c)* $\left(\sqrt{15-\sqrt{z}}+\sqrt{\sqrt{z}+15}\right)^2=56$

Határozd meg az $x+y+z$ értékét, ez a kódhoz szükséges **tizedik szám**.

Add össze a fenti feladatok végeredményeit és oszd el ezzel a számmal a 10 540 393 számot!

Ha a fenti feladatokat hibátlanul oldottad meg, hányadosként egy egész számot kapsz. Ez a szám a titkos kód, amellyel bejutsz a páncélterembe. Sikerült? Gratulálunk! Gyere és nézd meg a kincseket! ☺

## Mentsd meg a világot! – vegyes feladatok, 5. osztály, kooperatív csoportmunka

Gonosz geotrollok támadták meg a világot, és el akarják pusztítani a Földet! Ezeket a szörnyeket csak a galaktikus zsoldoshadsereg győzheti le, akik nagyon drágán dolgoznak, 1000 aranyért pusztítják el az összes geotrollt.

A feladatotok, hogy legfeljebb 40 perc alatt az egész csoport közösen összegyűjtsön 1000 aranyat, amiről a zsoldoshadsereg a galaktikus távközlési hálózaton keresztül természetesen azonnal értesül, automatikusan dolgozni kezd, így a segítségükkel megmenthetitek a világot. A feladatsor hibátlan megoldása során 1200 aranyat gyűjthettek. A táblára felragasztott papírokra írhatjátok fel a feladatok végeredményeit, amit én pipálgatok majd, ha hibátlan.

Ha sikerül 1000 aranyat összegyűjtenetek, megmentitek a világot, és mivel életben maradtunk, mindenkinek adok 2-2 jutalmat. Ha minden feladat hibátlan, 3-at választhattok.

**1.** Hány cm hosszú az a szalag, amelyből 11 és fél m-t és 37 dm-t levágva egy 320 cm-es darab marad? (20 arany)

**2.** Egy fonalgombolyagból a cica leszakított 17 cm-t, majd 270 mm-t, ezután 5 dm-t és még 56 cm-t. Így a fonálból 500 mm maradt. Add meg méterben a fonál eredeti hosszát! (20 arany)

**3.** A Tisza tavaszi áradásakor 125 km hosszan olyan magas volt a víz szintje, hogy a töltést ezen a szakaszon homokzsákokkal kellett megerősíteni. Hány homokzsákot raktak le, ha egy homokzsák 80 cm hosszú és 4 sort tettek egymásra? (30 arany)

**4.** Egy kiránduláson az első óra alatt 5 és fél km-t tettek meg a diákok, a második órában 4800 m-t, a harmadikban az első két óra alatt megtett út hosszának a felét. Hány métert gyalogoltak aznap a kirándulók? (20 arany)

**5.** Egy emelődaru teherbírása 4 tonna. Fel tud-e emelni egyszerre 7 db 150 kg-os és 6 db 400 kg-os betontömböt? (20 arany)

**6.** Egy lázcsillapító tabletta tömege fél gramm. Egy dobozban 20 tabletta van, egy kartonban 50 doboz, és egy raklapon 1500 karton fér el. Hány tonna gyógyszert szállít az a kamion, amelynek a csomagtartójába 12 raklapnyi áru fér el? (30 arany)

**7.** Egy üveg meggybefőtt tömege 680 gramm. Mennyi ebből a meggy tömege, ha az 20 grammal több, mint az üvegé? (30 arany)

**8.** Egy 1375 m hosszú alagúton halad át a 125 m hosszú vasúti szerelvény. Hány percig tart a teljes szerelvény áthaladása, ha másodpercenként 25 métert tesz meg? (30 arany)

**9.** Ákos, Barnus és Csaba párosával ráálltak a mérlegre. Ákos és Barnus együtt 84 kg, Barnus és Csaba együtt 92 kg, Ákos és Csaba együtt 94 kg volt. Mekkora a fiúk tömege külön-külön? (30 arany)

**10.** Anya farsangi fánkot süt, egy és fél perc alatt sül ki 4 darab a serpenyőben. Hány fánkot süt másfél óra alatt? (30 arany)

**11.** Hány percet töltöttél az iskolában, ha 7:48-kor érkeztél és 13:12-kor indultál haza? (20 arany)

**12.** Egy lift ajtaján a következő szöveg olvasható: 4 személy (max. 400 kg) részére. A liftre várakozó Antal 124 kg-os. Megérkezik Bendegúz és két barátja. Hármójuk közül Bendegúz a legnehezebb, ő 92 kg-os. Legfeljebb hány kg az együttes súlyuk? Beszállhatnak-e mind a négyen a liftbe? (30 arany)

**13.** Janka hetente egyszer elmegy úszni. A medence hossza 33 méter. Minden alkalommal legalább 15, de legfeljebb 20 medencehosszt úszik. Hány métert úszik Janka egy év (365 nap) alatt? (30 arany)

**14.** Az osztálykirándulásra minden tanulónak 12 850 Ft-ot kell befizetni. Mennyi pénz gyűlik össze, ha 34 tanuló jár az osztályba? (20 arany)

**15.** Balabárban 1 kéktúra és 1 zöldtúra annyit ér, mint 4 zöldtúra és 3 pirostúra. Továbbá 10 zöldtúra annyit ér, mint 4 zöldtúra és 1 kéktúra. Hány zöldtúra ér annyit, mint 1 kéktúra? Hány zöldtúra 1 pirostúra? (30 arany)

**16.** Ha 3 darab hagyma ugyanannyiba kerül, mint 2 db alma, akkor melyik a drágább: 11 darab alma és 5 darab hagyma vagy 11 darab hagyma és 5 darab alma? (30 arany)

**17.** Hány cm-es az a fiú, akinek a testmagassága 120 cm és még a testmagasság felének a harmada? (30 arany)

**18.** Összesen 13 db 10 és 20 forintos érmével fizettünk ki 210 Ft-ot. Melyik érméből hány darabot használtunk fel? (40 arany)

**19.** A gyümölcsösben 160 almafán 75 kg, 142 almafán 105 kg és 85 almafán pedig 160 kg volt az átlagtermés. Egy cég 50 tonna alma felvásárlására kötne szerződést. Az adatok ismeretében számold ki, rendelkezésünkre áll-e a kérdéses mennyiség? (20 arany)

**20.** 27 darab teljesen egyforma üvegből 9 db tele van mézzel, 9 db félig van, a többi üveg üres. Hogyan tudjuk az üvegeket 3 dobozba úgy elhelyezni, hogy mindegyik dobozban azonos mennyiségű méz legyen? (20 arany)

**21.** Három üvegben 6 liter folyadék van. Ha az elsőből kiöntünk 1 litert, a másodikból 8 dl-t, a harmadikból 6 dl-t, akkor mindegyik üvegben ugyanannyi marad. Hány deciliter volt az egyes üvegekben eredetileg? (30 arany)

**22.** Ha 5 kiskutya 3 perc alatt 1 liter tejet iszik meg, akkor 101 kiskutya 1 óra alatt hány liter tejet iszik? (40 arany)

**23.** Egy falióra 9 másodperc alatt üti el a tíz órát. Hány másodperc alatt üti el az öt órát? (20 arany)

**24.** 5 darab egyforma, 20 cm hosszúságú, azonos minőségű gyertyát 5 perc időkülönbséggel meggyújtottunk. Az első gyertya meggyújtásától számítva hány perc telik el az ötödik gyertya teljes elégéséig, ha minden gyertya 1 mm-t fogy 1 perc alatt? (30 arany)

**25.** Hány perc telik el hajnali 4 óra 47 perctől másnap délután 15 óra 12 percig? (20 arany)

**26.** Hány óra van most, ha éjféltől ötször annyi idő telt el mostanáig, mint amennyi a teljes napból még hátra van? (30 arany)

**27.** Nyusziful már megfestette a tojások negyed részét. Ha még két tojást festene, akkor már készen lenne a tojások harmadrészével. Hány tojást kell összesen megfestenie? (40 arany)

**28.** Torkos Mókus hétfőn megette a diók felét és még 1 diót. Kedden a maradék felét és még egy diót. Így szerdára már csak 10 szem diója maradt. Hány diója volt Torkosnak hétfőn reggel? (40 arany)

**29.** Használjuk ebben a feladatban a t: tucat (12); d: darab (1) és a p: pár (2) rövidítéseket! Végezd el a műveleteket, az eredményt p-ban add meg! (40 arany)

*a)* (2 t − 6 d) − (2 t − 6 p) = ...................... p

*b)* (5 p + 2 d) · 3 + (8 p − 9 d) · 2 = ...................... p

**30.** Az n a nap rövidítése; az ó órát jelent; a h a hét rövidítése. Végezd el a műveleteket! (30 arany)

*a)* 5 n − 3 · (1 n + 7 ó) = ......................ó

*b)* 3 · (2 h + 5 n) + 2 · (3 h − 4 n) = ...................... n

**31.** Végezd el a műveleteket! (30 arany)

*a)* 137 dm + 6 m + 2 km = ...................... dm

*b)* 29 cm + 13 m + 1200 mm = ...................... cm

**32.** Végezd el a műveleteket! (30 arany)

*a)* (51 perc + 4 óra) · 5 = ...................... perc

*b)* (3 nap + 34 óra) : 2 = ...................... óra

**33.** Végezd el a műveleteket! (30 arany)

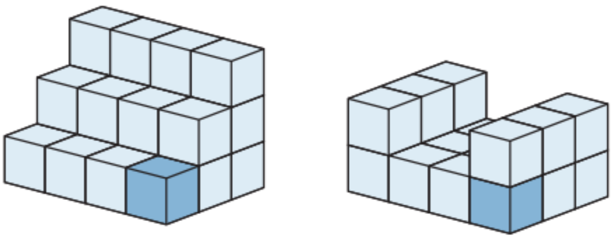
*a)* 60 kg : 60 dkg = ...................... g

*b)* (3 kg + 20 dkg) : 800 g = ...................... g

**34.** Egy szoba magassága deciméter pontossággal mérve 29 dm. Legalább hány centiméter lehet a magassága? (20 arany)

**35.** Terka süteményt sütött. Harmadannyi áfonyást, mint málnást, és negyedannyi szamócást, mint málnást. Így éppen 2-vel több áfonyás süteményt sütött, mint szamócást. Hány süteményt sütött összesen? (40 arany)

**36.** Építettünk egy nagy kockát, majd pár kis kockát elvettünk belőle. Legkevesebb hány kis kocka hiányzik egy nagy kockához az alábbi testekből? (A képen látható alakzatok tömör alakzatok.) (30 arany)



**37.** Egy szülinapi bálon 5 testvérpár vett részt. A tíz gyerek mind különböző életkorú (az életkorok egész számok), a legfiatalabb 5, a legidősebb 14 éves. Négy testvérpár két-két tagjának életkorát összeadva 15, 18, 19 és 26 az eredmény. Az ötödik testvérpár egyik tagja 10 éves. Hány éves a testvére? (40 arany)

**38.** Anna, Bori, Csilla, Dani és Elemér egy hosszú padra szeretnének leülni. Összesen hányféleképpen ülhetnek le egymás mellé, ha az azonos neműek nem ülhetnek egymás mellett? (40 arany)

**39.** Az éjjel Bogáncs minden ötödik, Pamacs minden hatodik, Bodri minden nyolcadik percben vakkantott egyet. A vakkantást mindhárom kutya 22 órakor kezdte. Reggel 7 óráig összesen hány alkalommal vakkantott egyszerre a három kutya ezen az éjszakán? (40 arany)

**40.** 1 alma, 1 körte és 1 barack közül Ági, Bori és Csilla megevett egy-egy gyümölcsöt. Arra a kérdésre, hogy ki melyiket ette meg a következőket válaszolták:

Ági: Az almát Csilla ette meg.
Bori: A körtét Csilla ette meg.
Csilla: Nem mondanak igazat, én sem az almát, sem a körtét nem ettem meg.

Tudjuk, hogy aki a barackot ette meg, nem mondott igazat. Melyik gyümölcsöt ki ehette meg? (50 arany)

## Győzd le a matekorkokat! – 8. osztály, kooperatív csoportmunka

Gonosz matekorkok támadták meg a világot és el akarják pusztítani a Földet! Ezeket a szörnyeket csak a galaktikus zsoldos robothadsereg győzheti le, akiknek a beindításához egy titkos kód szükséges. A feladatotok, hogy legfeljebb 40 perc alatt az egész csoport közösen hibátlanul megoldja a következő feladatokat, megfejtsétek a kódot, amiről a zsoldos robothadsereg a galaktikus távközlési hálózaton keresztül természetesen azonnal értesül, automatikusan dolgozni kezd, így a segítségükkel megmenthetitek a világot.

**1.** Számold ki! **Add össze az eredményeket!**

*a)* $12^2 =$ *b)* $15^2 =$ *c)* $(-13)^2 =$ *d)* $-14^2 =$

**2.** Számold ki! **Add össze az eredményeket!**

*a)* $\sqrt{121} =$ *b)* $\sqrt{-64} =$ *c)* $-\sqrt{81} =$

*d)* $\sqrt{8^2+6^2} =$ *e)* $\sqrt{13^2 \cdot 7^2} =$

**3. Hány darab igaz állítás van az alábbiak között?**

*a)* $\sqrt{256} \cdot \sqrt{144} = \sqrt{256 \cdot 144}$ *b)* $\sqrt{25} \cdot \sqrt{25} = 5^2$ *c)* $\frac{\sqrt{400}}{\sqrt{900}} = \frac{2}{3}$

*d)* $\sqrt{625} : \sqrt{125} = \sqrt{625 : 125}$ *e)* $\sqrt{81} - \sqrt{9} = \sqrt{81-9}$

*f)* $\sqrt{64} + \sqrt{49} = \sqrt{64+49}$

**4.** A téglalap egyik oldala 8 cm, a másik ennek a háromnegyede.

*a)* Számold ki a területét!

*b)* Számold ki az átlójának hosszát!

**Számold ki a fenti két eredmény összegét!**

**5.** A téglalap alakú parkon átlósan átvezet egy út, amelynek hossza 15 km. A park 9 km hosszú. **Számold ki, milyen széles a park!**

**6.** A derékszögű háromszög csúcsainak koordinátái $A(1;0)$, $B(7;0)$, $C(7;3)$.

*a)* Számold ki a háromszög oldalainak hosszát! (Egy négyzetrács oldala 1 egység.)

*b)* Számold ki a háromszög területét!

**Határozd meg a fenti eredmények összegét egészre kerekítve!**

**7.** Egy derékszögű háromszög oldalainak mérőszámai pitagoraszi számhármast alkotnak. **Mekkora a háromszög területe cm$^2$-ben kifejezve, ha a kerülete** 120 **cm?**

**8.** Egy rombusz oldala 17 cm hosszú, hosszabbik átlója 30 cm.

*a)* Számold ki a rombusz rövidebbik átlóját!

*b)* Számold ki a rombusz területét!

**Határozd meg a fenti eredmények összegét!**

**9.** Egy szimmetrikus trapéz alapjai 10 cm és 20 cm hosszúak, területe 180 cm$^2$.

*a)* Számold ki a trapéz magasságát!

*b)* Számold ki a trapéz kerületét!

**Határozd meg a fenti eredmények összegét!**

**10.** Egy 5 cm sugarú kör középpontjától 13 cm-re lévő pontból érintőt húzunk a körhöz. **Mekkora az érintőszakasz hossza?**

**11.** Add meg a $d$ szakasz hosszának egészre kerekített értékét, ha $d$

*a)* a 12 cm oldalú négyzet átlója,

*b)* a 16 cm átlójú négyzet oldala,

*c)* a 32 cm oldalú szabályos háromszög magassága.

**Számold ki a fenti három eredmény összegét!**

**12.** Egy húrtrapéz alapjainak hossza 24 cm és 16 cm, a magasságának hossza pedig 12 cm. Számítsd ki a trapéz szárainak hosszát! **Vedd az eredmény százszorosát és kerekítsd egészre!**

**13.** Egy 2,6 méteres gerendát döntöttünk a falhoz. A gerenda éppen a fal tetejéhez támaszkodik, az alja pedig 132 cm-re van a faltól. **Milyen magas a fal?**

**14. Számold össze, hogy az $a$, $b$, $c$ oldalakkal megadott háromszögek közül hány derékszögű háromszög van!**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 12 | 60 | 10 | 13 | 7 | 33 | 11 | 21 | 14 |
| $b$ | 35 | 175 | 22 | 84 | 23 | 56 | 6 | 20 | 16 |
| $c$ | 37 | 185 | 24 | 85 | 25 | 65 | 12 | 28 | 35 |

**15.** Az $ABCD$ húrtrapéz oldalainak hossza: $AB = 5$ cm; $BC = 2{,}5$ cm, $CD = 2$ cm és $DA = 2{,}5$ cm. **Számold ki a trapéz magasságának és a trapéz kerületének a szorzatát!**

**16.** Két fa között 1,5 méter magasságban kifeszítettünk egy 10 méter hosszú ruhaszárító kötelet. A közepére ráakasztottunk egy száradó inget, amely 80 cm-re lóg le a kötél szintjétől. A kötél a ráakasztott vizes ing súlya miatt 4 cm-t megnyúlt. **Milyen magasan lesz ekkor a száradó ing alja a talajtól? Kerekítsd az eredményt cm-re!**

**17.** Kerítést szeretnénk készíteni az 924 $m^2$ területű, derékszögű háromszög alakú zöldséges kertünk köré. A kert 33 méter hosszúságú befogója mentén már elkészültünk vele. **Milyen hosszú kerítést kell még készíteni, ha teljesen körbe akarjuk keríteni a kertet?**

**18.** Egy 15 cm sugarú körbe egy 18 cm-es húrt rajzolunk. **Milyen távolságra van ez a húr a kör középpontjától?**

**19.** Géza úgy készített deltoidot, hogy egy 5 cm és 12 cm oldalú téglalapot az egyik átlója mentén kettévágott, és a két részt összeragasztotta. **Milyen hosszú az így kapott deltoid rövidebb átlója? Válaszodat cm-re kerekítve add meg!**

**20.** Egy szabályos háromszög magassága 7 cm. **Számítsd ki egy középvonalának hosszát! Válaszodat cm-re kerekítve add meg!**

**21.** A libegő szintkülönbsége 262 m, a vízszintesen mért hossza 1040 méter. **Mennyi idő alatt érünk fel a pálya tetejére, ha az ülések sebessége** 5,4 **km/h?** *(A menetidőt percre kerekítve add meg!)*

**22. Hány olyan rácspont van**, amelynek az origótól való távolsága 5 egység?

**23. Hány cm hosszú annak a téglatestnek a leghosszabb lapátlója**, amelynek élei 8 cm, 12 cm és 16 cm hosszúak?

**24.** Hány cm hosszú annak a téglatestnek a testátlója, amelynek élei 5 cm, 8 cm és $\sqrt{80}$ cm hosszúak?

**25.** A $DEF$ derékszögű háromszög $DE$ befogója 7 cm-rel rövidebb, mint a $DF$ befogó. Az átfogó 2 cm-rel hosszabb, mint a $DF$ befogó. **Számítsd ki a $DEF$ háromszög kerületét!**

Add össze a fenti végeredményeket (a vastag betűs kérdésekre adott válaszokat)! Az eredményhez adj hozzá még 2-t!

Oszd el az így kapott számmal a 30 481 879-et!

Az így megkapott négyjegyű szám a titkos kód. Sikerült? Életben maradtunk? Yuppi!!! ☺

## Irodalomjegyzék

[1] Csahóczi Erzsébet–Csatár Katalin–Kovács Csongorné–Morvai Éva–Széplaki Györgyné–Szeredi Éva: Matematika tankönyv 5–8. évfolyam, Apáczai Kiadó, Celldömölk, 2009.

[2] Gedeon Veronika–Paróczai Eszter–Számadó László–Tamás Beáta–dr. Wintsche Gergely: OFI Kísérleti tankönyv, 7–8. évfolyam, Alföldi Nyomda Zrt., Debrecen

[3] Csordás Mihály–Konfár László–Kothencz Jánosné–Kozmáné Jakab Ágnes–Pintér Klára–Vinczéné Winter Andrea: Sokszínű matematika, 5-8. évfolyam, Mozaik Kiadó, Szeged, 2011.

[4] Urbán János–Reiman István: A Kalmár verseny feladatai, 2006-2012., A természettudományi Közlöny 2014. I. különszáma

[5] Zrínyi feladatok, 2005–2017., Mategye Alapítvány, Kecskemét

[6] Gerőcs László–Orosz Gyula–Paróczay József–Szászné Simon Judit: Matematika Gyakorló és érettségire felkészítő feladatgyűjtemény, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2005.

[7] Juhász István–Orosz Gyula–Paróczay József–Szászné Simon Judit: Matematika 10., Az érthető matematika, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2010.

[8] Róka Sándor: Szakköri kalauz, 5–6. évfolyam, Zalamat Alapítvány, Nagykanizsa, 2014.

*Paróczay Eszter*

*Paróczay Eszter matematika–ábrázoló geometria szakos tanár. Az Oktatási Hivatal megbízásából az 5–8. évfolyamosok számára készült tankönyvek és digitális tananyagok tananyagfejlesztője. Számos matematikai cikk és kiadvány szerzője vagy társszerzője. A Zrínyi Ilona Matematikaverseny megyei szervezője.*

# Védekezzünk matematikával a járványok ellen! (2018. június, Gazdaság – technika – művészet)

A fertőző betegségek világméretű terjedését számos történelmi eset példázza. Az elmúlt húsz év jelentősebb járványai közt volt a 2002–2003-as SARS járvány, a 2009-es A(H1N1) influenza, majd a 2012-es közel-keleti MERS-vírus. Az Ebola-járvány 2013 és 2016 között pusztított Nyugat-Afrikában. A téma tehát mit sem veszít aktualitásából, a matematikai járványtan ennek okán az alkalmazott matematika egyik vezető jelentőségű területévé vált.

Természet- és műszaki tudományokban gyakran használunk ún. kompartment- (rekeszes) modelleket a fizikai rendszerek viselkedésének leírására. Egy járvány terjedésének modellezéséhez csoportokra osztjuk a populációt, és az egyes rekeszekben levő emberek számát az időben nyomon követve írjuk le a betegség terjedését. Feltételezzük, hogy a populáció homogén és az azonos csoporton belüli egyéneket nem különböztetjük meg. Így a csoportok közötti interakciót és mozgásokat figyelembe véve nemlineáris differenciálegyenleteket írhatunk fel az egyes rekeszekben levő emberek számának időbeni változására. A kompartment-modellek számos betegség terjedésének leírására alkalmasak, homogén (egy fertőzött csoport) és heterogén (több fertőzött csoport) populációkban, mind emberi, mind több fajt érintő (pl. szúnyog által terjesztett) járványokra. *Metapopulációról* és modelljeiről akkor beszélünk, amikor a populáció tagjai különböző térbeli helyszíneken tartózkodnak, amelyek között összeköttetés van.

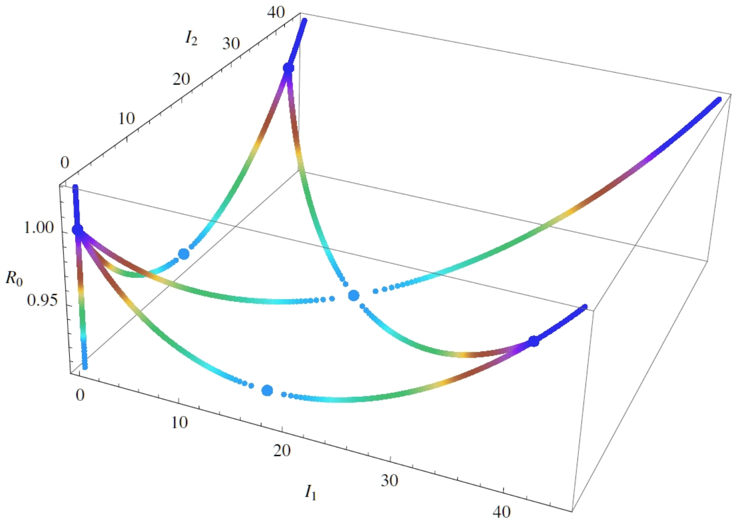
A járványmodellezés egyik legfontosabb kérdése annak meghatározása, hogy a betegség képes-e elterjedni egy fogékony populációban, vagy rövid idő alatt kihal. Meg kell vizsgálnunk, hogyan függ a dinamika az egyes modellparaméterektől, majd az egyes paraméterekre küszöböt adva leírhatjuk a betegségmentes altér határait. Ezek a kérdések nehéz matematikai problémákat jelentenek, különösen a bonyolult sokdimenziós modellekben. Az emberek mobilitását korlátozó kontrollstratégiák vizsgálata különösen összetett. Egy betegségmentes területet megvédhetünk a beutazás meggátolásával, ugyanakkor egy ilyen intézkedés negatív hatással lehet a rendszer más részeire; az egyes régiókban való utazási korlátozás más területeken nagyobb csoportosulást idézhet elő, ami magasabb betegszámhoz és a járvány gyorsabb terjedéséhez vezet.

A metapopulációs modellek felhasználhatósága sokrétű a matematikai biológiai kutatások terén. A matematikai analízisből nyert eredmények figyelembevételével a járványügyi hatóságok hatékonyabb betegségkezelési és védekezési stratégiákat állíthatnak fel. Az egyik legegyszerűbb rekeszes modell az SIRS-modell (S: fogékony, I: fertőzött, R: felgyógyult), amelynek metapopulációs változatában vizsgálhatjuk a védőoltás, a kontaktszám csökkentése, és a különböző területek közötti utazást korlátozó stratégiák hatását. Az eredmények kiterjeszthetők arra az esetre is, amikor az utazási korlátozás csak a populáció egyes csoportjaira alkalmazható.

Az Egyesült Államokban a hepatitis-B járványok kapcsán figyelték meg azt az érdekes jelenséget, miszerint a megbetegedések száma jelentős eltérést mutathat a különböző városok között. Ez matematikai nyelvre lefordítva annyit tesz, miszerint a járványterjedés dinamikáját leíró rendszernek több stabil egyensúlyi állapota is van. Az ilyen járványok lefolyását előrejelezni, és a védekezési stratégiát felállítani különösen nehéz feladat a többféle lehetséges egyensúlyi állapot miatt.

Tekintsünk egy SIVS–típusú (fogékony–fertőzött–vakcinált–fogékony) modellt két összekapcsolt régióra. Az egy régióra megszorított, háromdimenziós rendszerben bistabilitás léphet fel bizonyos paramétertartományokban: három egyensúlyi helyzet közül kettő is lehet stabil, egy betegségmentes és egy endemikus állapot. A számítógépes szimulációkkal segített matematikai analízis rendkívül gazdag bifurkációs struktúrát fed fel a modellben: az összekapcsolt régiókra felírt rendszernek akár kilenc egyensúlyi helyzete is lehet, amelyek tripla transzkritikus, illetve dupla nyereg-csomó bifurkációs pontokban jelennek meg.

A metapopulációs modellek nemcsak ember és ember között terjedő, hanem szúnyogok által terjesztett betegségek modellezésére is alkalmasak. A dengue-láz, a chikungunya-láz és a malária három olyan, világszerte pusztító betegség, amit szúnyogok terjesztenek. Ezeknek a járványoknak a dinamikáját számos tényező befolyásolja: a betegségterjedés két, egymástól jelentősen különböző tulajdonságokkal bíró populáció (emberek, szúnyogok) interakciójával jön létre, valamint a dinamikára térbeli tényezők (pl. szúnyogok helyváltoztatása) is hatással vannak. E betegségek modelljei kevés módosítással alkalmassá tehetők kullancsok által terjesztett járványok leírására, ilyenek Magyarországon és Európa-szerte megbetegedéseket okoznak emberekben és állatokban. A dengue-láz elsődleges védekezési stratégiái a szúnyogokat célozzák. Számos kontrollprogram van haszná-




Az ábra egy olyan szituációt ábrázol, amikor két régió áll összeköttetésben, és mindkét helyen egy tökéletlen védőoltással vakcinálunk. A tökéletlenség azt jelenti, hogy a védőoltás nem mindenkinek ad védelmet, illetve csak részleges védelmet biztosít. A színes görbék a lehetséges egyensúlyi helyzeteket jelzik, ahol $I_1$ és $I_2$ jelenti a fertőzöttek számát a két régióban, a függőleges tengelyen pedig egy fontos paraméter, az alap reprodukciós szám változik, amellyel az egyensúlyok (az ábrán a színes görbék vízszintes síkokkal vett metszéspontjai) száma is megváltozhat, ezt nevezzük bifurkációnak. A bifurkációs pontokat a nagyobb méretű pontok jelzik. A háromdimenziós bifurkációs diagram egy érdekes rája-szerű alakzatot rajzol ki, a tanulsága pedig az, hogy a térbeli struktúra miatt a dinamika sokkal komplexebbé válhat.

latban világszerte, mint például a szúnyogok irtása, illetve a sterilrovar-technika. Ezek a stratégiák a rovarfejlődési ciklus különféle szintjein hatnak, és általában helyszínspecifikusak is (a steril rovarokat kijelölt helyen engedik el), tehát részletes matematikai modellre van szükség. A jelenleg fejlesztés alatt álló vakcina képes lehet csökkenteni a megbetegedések számát, ugyanakkor több tanulmány is figyelmeztet a védőoltás negatív hatásaira egyes korcsoportokban. Ebben a bonyolult járványtani kérdésben tehát kiemelt jelentőséget kap a betegségmodellezés és a kontrollstratégiák kvalitatív analízise.

Számos biológiai folyamat dinamikájában megfigyelhetők nemautonóm hatások. A dengue-láz terjesztéséért felelős szúnyogpopuláció mérete ciklikusan változik a szezonális dinamikának megfelelően. A népszerű nyaralóhelyek forgalma ugyancsak nagy különbségeket mutat az év különböző részeiben, a járványkitörés valószínűsége jóval nagyobb, ha egy fertőzött utazó főszezonban érkezik.

A fent leírt bistabilitás jelensége nemcsak járványterjedési modellekben léphet fel. A szakirodalomban sokat idézett Allee-effektus Warder Clyde Allee nevéhez fűződik, aki egy 1931-ben közölt írásában egy aranyhal-populáció növekedését vizsgálva kis denzitásokon fellépő negatív denzitásfüggést figyelt meg. Más szóval, kis populációméret esetén az egyedeknek hátrányt jelent társaik hiánya, ami korlátozott (gyakran negatív) növekedést jelent a populációra nézve. Ekkor megadható egy kritikus szint a populáció méretére (Allee-határ): ez alatt a populáció hosszú távon kihal, azonban a populáció képes lehet a növekedésre, ha mérete meghaladja a kritikus értéket. A matematika nyelvére lefordítva ez azt jelenti, hogy minden, az Allee-határ mint egyensúlyi helyzet alatt indított megoldás a triviális egyensúlyhoz konvergál (kihalás, üres populáció), az Allee-határállapotnál nagyobb kezdeti értékekkel viszont nő a populáció, míg el nem éri annak eltartóképességét (pozitív, stabil állapot). Metapopulációs modellekkel állati populációk migrációs viselkedésének hatását is vizsgálhatjuk. Ha a vándorlás helyszíneire, mint régiókra tekintünk és feltesszük, hogy az egyes szubpopulációkban Allee-jelenség léphet fel, akkor egy metapopulációs modellhez jutunk. Ezekkel a kutatásokkal matematikai úton magyarázatot nyerünk arra az állati populációkra megfigyelhető jelenségre, miszerint a populációk egyedszáma jelentősen különböző a populáció élőhelyei között.

*Knipl Diána*

*Knipl Diána 2014-ben szerzett PhD fokozatot a Szegedi Tudományegyetemen Röst Gergely témavezetésével, doktori értekezésének témája a matematikai járványmodellezés volt. A torontói York Egyetemen, majd a londoni UCL-en folytatott kutatómunkát, több európai uniós projekt résztvevője is volt. Hazai és nemzetközi szakmai díjakat nyert (pl. Farkas Gyula Díj, Robert May Award). Jelenleg Londonban dolgozik a Morgan Stanley-nél.*

# Térbeli feladatok megoldása GeoGebrával
## (2018. június, Tanóra – szakkör)

Ha kell egy jó rajz, vagy már meglévő rajzon, képen, festményen szeretnénk dolgozni, érdemes megnyitni a GeoGebrát. Ha például egy metszéspont „leszalad" a képernyőről, elég átformázni, nem kell újrakezdeni. A rajzelemek, szerkesztési segédvonalak megjelenítését akár bemutató közben is szabályozhatjuk.

A GeoGebra azonban nem rajzoló, hanem dinamikus geometriai szerkesztő program, amely lehetővé teszi, hogy síkbeli és térbeli szerkesztéseket, bizonyításokat számítógépes környezetben, interaktív módon szemléltessünk, tanítsunk, tanuljunk.

A sokoldalúság alapja a dinamikus adatkezelés, amelynek során az alakzatokat logikai és (vagy) optikai szempontból definiálhatjuk, ami lehetővé teszi a rajz átformázását úgy, hogy az elemek közötti logikai kapcsolatok megmaradnak.

Ebben a cikkben a szerkesztés során létrehozott logikai rendszert ábrának, az alakzatok pillanatnyi optikai megjelenítését rajznak nevezzük. Ugyanannak az ábrának a felhasználásával sok-sok rajzot hozhatunk létre, megvizsgálhatjuk a speciális (a rajzra vonatkozó) és az (adott szerkesztési eljárás keretei között) általános tulajdonságok közötti viszonyt.

Egy alakzat logikai és optikai létezése közötti különbséget jól érzékelteti, hogy két egyenes rajzi megjelenítésekor „átfedés" is létrejöhet, amely csak a rajzon létezik, de az ábrához nem tartozik hozzá. Ugyanakkor az is előfordulhat, hogy például egy kör és egy egyenes metszéspontját definiáltuk, de a rajz pillanatnyi állapotában ez a metszéspont nem jön létre, mert valamelyik alakzatot nem metsző helyzetbe mozgattuk.

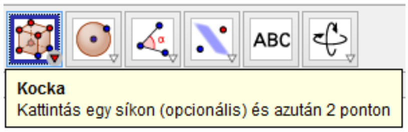
Mi most a térgeometriára koncentrálunk, és olyan ötletekre hívjuk fel a figyelmet, amelyek hasznosak, de a programmal való első ismerkedéskor nem mindenki számára nyilvánvalóak.

A látvány beállításának hasznos eszköze a *Jelölőnégyzet*, amely ha ki van pipálva, akkor a logikai érték igaz, ha nincs kipipálva, akkor hamis. Jelölőnégyzetet a Jelölőnégyzet ikonra kattintva vagy a *Parancsmezőbe* beírva hozhatunk létre. Sajnos nem minden ablakban tudjuk engedélyezni az ikonját, ezért érdemes megismerni, hogy hogyan definiálhatjuk közvetlenül a parancsmezőben.

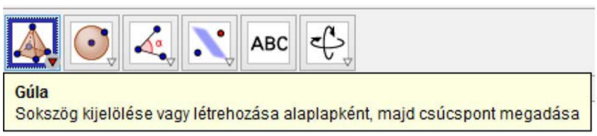
**Gyakorló példa.** *Szerkesztettünk egy kockát, a kockába szabályos tetraédert és szabályos oktaédert írtunk. Meg szeretnénk mutatni, hogy a kocka lapközéppontjai és a tetraéder éleinek felezőpontjai ugyanannak a szabályos testnek, a szabályos oktaédernek a csúcsai. A látványt úgy akarjuk beállítani, hogy a kocka, a tetraéder és az oktaéder külön-külön és együtt is látható legyen, és hogy bemutatás közben is szabályozható legyen, hogy ezek közül éppen melyiket lehet látni.*

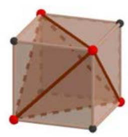
A térbeli szerkesztéseket 3D-s nézetben célszerű végezni, amely a legördülő menüsorból (Nézet, 3D-s nézet) vagy a Ctrl + Shift + 3 billentyűkombinációval választható ki.

A kockát a *Kocka* parancsikon segítségével szerkeszthetjük:

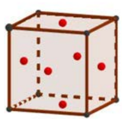


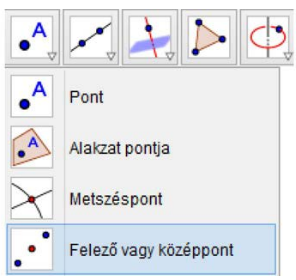

A kockába írt szabályos tetraédert is parancsikon segítségével szerkeszthetjük, például a *Gúla* parancsikont alkalmazva a kocka egy csúcsából induló három élének végpontjait választjuk alaplap csúcsainak, a belőle induló testátló másik végpontját pedig a gúla csúcsának.

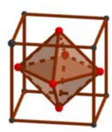


A szabályos oktaéder csúcsait, azaz a kocka lapközéppontjait a *Felezőpont* parancsikon segítségével szerkesztjük. A szabályos oktaédert összerakhatjuk két olyan gúlából, amelyek alapnégyzete közös, így ehhez is a *Gúla* parancsikont használhatjuk.



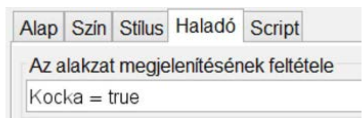


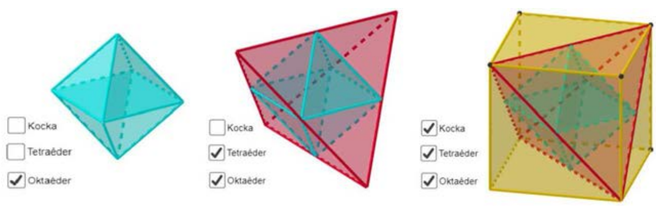
Ha a kocka láthatóságát *Jelölőnégyzettel* akarjuk szabályozni, akkor létrehozunk egy erre szolgáló jelölőnégyzetet, majd a logikai értéket összekötjük az alakzattal, hogy hatással legyen a látványra.

- A parancsmezőbe beírjuk, hogy **Kocka = true**. Az Enter leütése után az algebra ablakban a logikai értékek között megjelenik a Kocka = true elem, a 2D ablakban a *Kocka* felirat és a kipipált *Jelölőnégyzet*.


- A kocka tulajdonságai ablakban a haladó fülre kattintva beállítjuk a láthatóság feltételét:

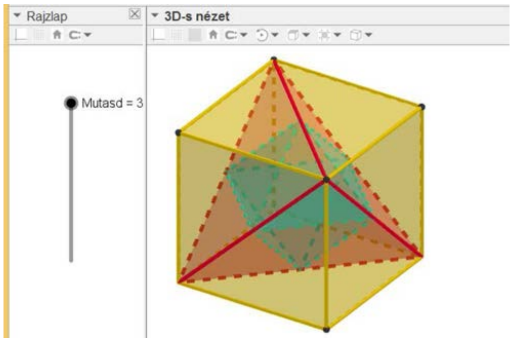



Hasonlóképpen jártunk el a tetraéder és az oktaéder esetében is (7.1. ábra). Mivel az oktaédert két gúlából raktuk össze, így mindkét gúla láthatóságát a megfelelő jelölőnégyzet kipipálásától tettük függővé. Ha elkészültünk a beállításokkal, akkor be is zárhatjuk az algebra ablakot. Vigyázzunk, a *2D ablakot (Rajzlap) ne zárjuk be*, mert a *Jelölőnégyzet* csak ott jelenik meg!




7.1. ábra. A kocka, a kockába írt szabályos tetraéder és a szabályos oktaéder láthatósága Jelölőnégyzettel szabályozva. (Vásárhelyi 2018b https://ggbm.at/gr292jkN)

Hasonló eredményt érhetünk el, ha nem *Jelölőnégyzetet*, hanem *Csúszkát* használunk. A *Csúszka* is a 2D ablakban látszik, ezért függőlegesre állítottuk, hogy keskenyre vehessük a 2D ablakot. A mi példánkban egy olyan *Csúszkát* definiáltunk, amelynek az $n$ változója 0, 1, 2 és 3 értékeket vehet fel (7.2. ábra). A kocka láthatóságának feltétele $n > 0$, a tetraéderé $n > 1$, az oktaéderé (a 2 gúláé) $n > 2$. A jelölőnégyzetes megoldáshoz képest elvesztettük azt a lehetőséget, hogy együtt és külön-külön is láthatóak legyenek az egyes szabályos testek.

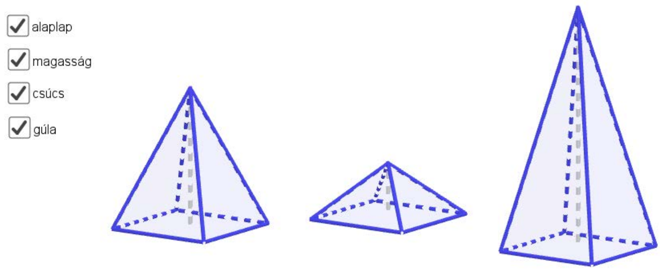



7.2. ábra. A kocka, a kockába írt szabályos tetraéder és a szabályos oktaéder láthatósága Csúszkával szabályozva. (Vásárhelyi 2018c https://ggbm.at/wTfsh8qV)

Bemutatáskor az alakzat forgatásához a *3D-s nézet forgatása*  ikont használjuk. Wertheimer (1912) kísérletei óta tudományosan is bizonyított, hogy a térélmény kialakulásában nagy szerepe van a megmozgatott, elfordított 3D-s nézetnek. A GeoGebrában 3D ábrákkal biztosítható a mozgásélmény. Az álló és a mozgó kép látványa közötti különbség minden szemlélőre komoly benyomást tesz. Olyanok számára is létrejön a térélmény, akik a statikus képen nem igazodnak el.

A *Jelölőnégyzet* mind a tanári bemutató, mind a diákok önálló problémamegoldása során nagyon hasznos. A következő feladatban három különböző megoldást szemléltetünk ugyanazon az ábrán. Jelölőnégyzetek segítségével érjük el, hogy az egyes meggondolások ne zavarják egymást.

**Feladat (Hajnal 1982):** *Egy négyoldalú szabályos gúlát kettévágunk egy olyan síkkal, amely átmegy az alaplap középpontján és párhuzamos az egyik oldallappal. Számítsuk ki a kapott részek térfogatának arányát!*




7.3. ábra. Négyoldalú szabályos gúla különböző magasságokkal. (Vásárhelyi 2018d https://ggbm.at/J9KmhzeA)

Megszerkesztjük a négyoldalú szabályos gúlát. Szerkesztünk egy $a$ oldalú négyzetet, változtatható hosszúságúra állítjuk be az $m$ magasságot, és megszerkesztjük a négyoldalú szabályos gúlát (7.3. ábra). A gúla oldaléleinek hossza

$$b = \sqrt{m^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2m^2 + a^2}{2}},$$

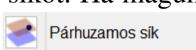
oldallapjainak magassága

$$m_o = \sqrt{m^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4m^2 + a^2}{4}},$$

és a térfogata

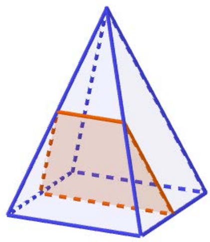
$$V = \frac{a^2 m}{3}.$$

A dinamikus geometriai szemléltetés mellett szól, hogy a gúla magassága akármekkora lehet, amit kézzel fogható modellen nem tudunk szemléltetni.

Megszerkesztünk egy, az alaplap középpontján áthaladó és az egyik oldallappal párhuzamos síkot. Ha magunknak szerkesztünk, ezt közvetlenül is megtehetjük úgy, hogy a 

ikonra kattintunk az oldallap és a középpont kiválasztásával. A tanulók számára tanulságosabb, ha a középponton át az oldallappal párhuzamos egyeneseket húznak.

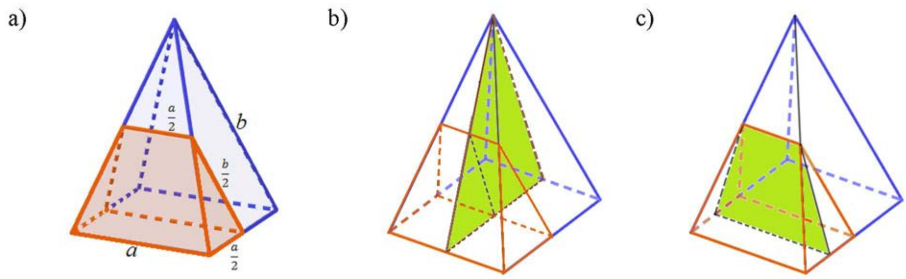
Megkeressük a gúlával alkotott metszetet, arra építve, hogy két párhuzamos sík egy harmadik síkot párhuzamos egyenesekben metsz. (Ezt az ismeretet tartalmazza a *Segítség*.)



7.4. ábra. A síkmetszet egy húrtrapéz. (Vásárhelyi 2018d https://ggbm.at/J9KmhzeA)

Megállapítjuk, hogy húrtrapézt kaptunk (7.4. ábra). A húrtrapéz egyik alapja $a$ hosszúságú, a négyzet középvonala. Másik alapja $\frac{a}{2}$ hosszúságú, az egyik oldallapnak a négyzettel párhuzamos középvonala. A húrtrapéz szárai a metsző síkkal párhuzamos lap oldaléleivel párhuzamos középvonalak, ezért $\frac{b}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2m^2+a^2}{2}}$ hosszúságúak.

A sík a gúlából egy olyan testet vág le, amelynek lapjai (7.5 a) ábra)




7.5. ábra. A levágott rész és szimmetriasíkjai.

- egy téglalap, amelynek oldalai $a$ és $\frac{a}{2}$ hosszúságúak;
- két egybevágó egyenlő szárú háromszög, amelyek alapja $\frac{a}{2}$ hosszúságú, száraik pedig $\frac{b}{2}$ hosszúságúak;

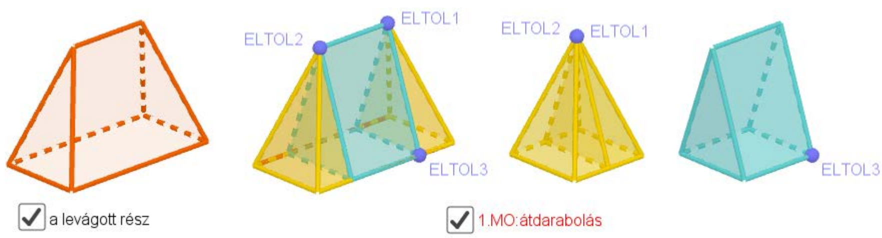
- két egybevágó húrtrapéz, ezek egyik alapja $a$, másik alapja $\frac{a}{2}$ hosszúságú, a szárak hossza pedig $\frac{b}{2}$.

A levágott testnek van két szimmetriasíkja, ezek merőlegesek az alaptéglalapra és illeszkednek annak egy-egy középvonalára. Az egyik a gúlával közös szimmetriasík. (7.5 b) és 7.5 c) ábra)

A térfogat meghatározására mutatunk három meggondolást. Ezek közös gondolata, hogy részekre bontással, illetve átdarabolással olyan testeket alkotunk, amelyek térfogatát egyszerűbb meghatározni.

A felbontás szemléltetéséhez eltoljuk az egyes részeket. Ehhez összekötjük egy szakasszal a kiválasztott kiindulási és egy véghelyzetet, és egy olyan eltolásvektort használtunk, amelynek kezdőpontja a kiindulási pont, végpontja pedig elmozdulhat a kiindulási és véghelyzet közötti szakaszon.

**1. megoldás:** Két kis gúlára és egy háromszög alapú egyenes hasábra bontjuk a levágott részt, majd a két kis gúlából összerakjuk az eredeti gúla $\frac{1}{2}$ arányban kicsinyített mását (7.6. ábra).




7.6. ábra. A levágott rész átdarabolása négyoldalú szabályos gúlává és egyenes hasábbá. (Vásárhelyi 2018d https://ggbm.at/J9KmhzeA)

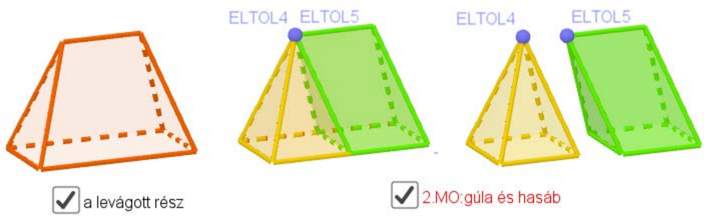
A kicsinyített gúla térfogata az eredeti gúla térfogatának $\frac{1}{8}$ része, azaz

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{a^2 m}{3} = \frac{2}{16} \cdot \frac{a^2 m}{3}.$$

A hasáb háromszöglapjai egyenlő szárú háromszögek, amelyek alapja $\frac{a}{2}$, magassága $\frac{m}{2}$, ezért a területük $\frac{am}{8}$. A hasáb magassága $\frac{a}{2}$, így a hasáb térfogata $\frac{a^2m}{16} = \frac{3}{16} \cdot \frac{a^2m}{3}$. A levágott rész térfogata tehát $\frac{5}{16} \cdot \frac{a^2m}{3}$, ami az eredeti gúla térfogatának $\frac{5}{16}$ része.

A metsző sík olyan részekre bontja a gúlát, amelyek térfogatának aránya $\frac{5}{16} : \frac{11}{16} = 5 : 11$. Látható, hogy ez független a kiindulási gúla alapélének és magasságának hosszától.

**2. megoldás:** A levágott testet felosztjuk egy négyoldalú szabályos gúlára és egy háromszög alapú ferde hasábra. (7.7. ábra)

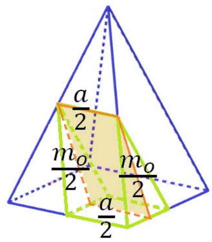



7.7. ábra. A levágott rész felosztása hasábra és gúlára.
(Vásárhelyi 2018c https://ggbm.at/J9KmhzeA)

A kis gúla az eredeti gúla $\frac{1}{2}$ arányban kicsinyített mása. A ferde hasáb alapja egybevágó a kis gúla oldallapjaival, a magassága a két párhuzamos sík távolságával egyenlő. A ferde hasábot átdarabolhatjuk (az 1. megoldásban is szereplő) egyenes hasábbá, vagy közvetlenül meghatározhatjuk a ferde hasáb térfogatát.

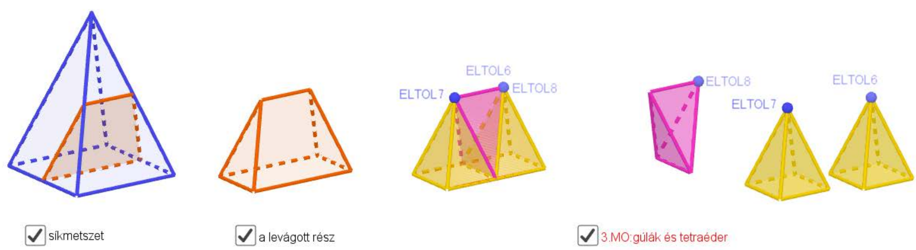
A ferde hasáb (és egyben a levágott rész) szimmetriasíkja egy paralelogrammában metszi a hasábot. A paralelogramma egyik párhuzamos oldalpárjának hossza az eredeti gúla alapélének fele $\frac{a}{2}$, illetve oldallap magasságának fele $\frac{m_o}{2}$. A paralelogramma $\frac{a}{2}$ oldalpárhoz tartozó magassága a gúla magasságának fele

$\frac{m}{2}$. A paralelogramma területe így $\frac{a}{2} \cdot \frac{m}{2} = \frac{am}{4}$, amiből az $\frac{m_o}{2}$ oldalpárhoz tartozó magasság $\frac{am}{4} : \frac{m_o}{2} = \frac{am}{2m_o}$, ami egyben a hasáb magassága is.




A hasáb alapja egyenlő szárú háromszög, amelynek alapja $\frac{a}{2}$, magassága $\frac{m_o}{2}$, ezért a területe $\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{m_o}{2} = \frac{am_o}{8}$. A hasáb magassága $\frac{am}{2m_o}$, így a hasáb térfogata $\frac{am_o}{8} \cdot \frac{am}{2m_o} = \frac{a^2m}{16} = \frac{3}{16} \cdot \frac{a^2m}{3}$. A levágott rész térfogata a kicsinyített gúla és a hasáb térfogatának összege, $\frac{5}{16} \cdot \frac{a^2m}{3}$, ami az eredeti gúla térfogatának $\frac{5}{16}$ része. A metsző sík az eredeti gúlát olyan részekre bontja, amelyek térfogatának aránya $\frac{5}{16} : \frac{11}{16} = 5 : 11$.

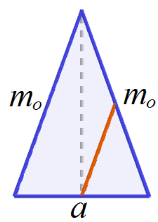
**3. megoldás:** A levágott testet felosztjuk két egybevágó négyoldalú szabályos gúlára és egy tetraéderre. (7.8. ábra)




7.8. ábra. A levágott rész felosztása két gúlára és tetraéderre.
(Vásárhelyi 2018c https://ggbm.at/J9KmhzeA)

A két gúla az eredetiből $\frac{1}{2}$ arányú kicsinyítéssel származik, együttes térfogatuk az eredeti gúla térfogatának $\frac{4}{16}$ része. A tetraédert négy egybevágó egyenlőszárú háromszög határolja, ezek alapja $\frac{a}{2}$, szárai $\frac{b}{2}$ hosszúságúak. A tetraéder egyik csúcsának a szemközti laptól való távolsága megegyezik a metsző síknak a vele párhuzamos gúlalaptól való távolságával.

Ezt a távolságot a gúlának az alapnégyzet középvonalára illeszkedő szimmetriasíkjával alkotott metszetéből könnyen meg tudjuk állapítani. A háromszög oldalai $m_o$, $m_o$, $a$. A terület kétféle kiszámításából az $m_o$ oldalhoz tartozó magasság $\frac{am}{m_o}$.

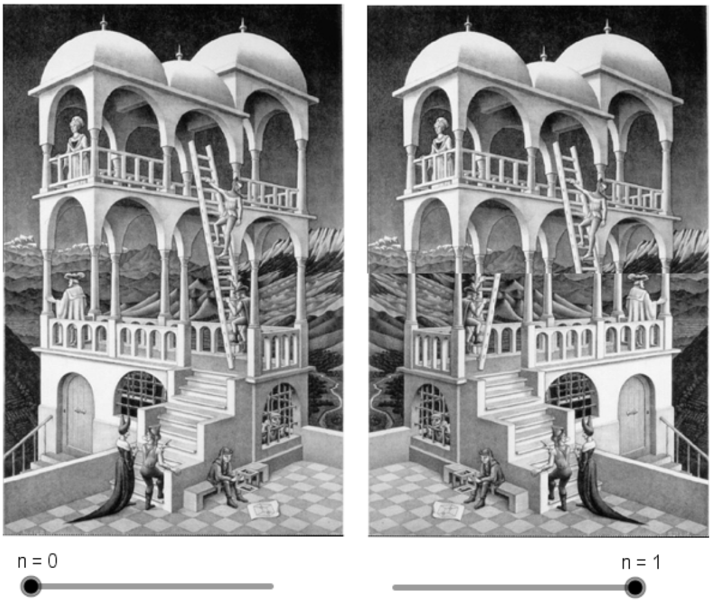



A keresett távolság az $m_o$ oldalhoz tartozó magasság fele, $\frac{am}{2m_o}$. A tetraéder térfogata pedig $\frac{1}{3} \cdot \frac{am_o}{8} \cdot \frac{am}{2m_o} = \frac{1}{16} \cdot \frac{a^2m}{3}$, a gúla térfogatának $\frac{1}{16}$ része. A metsző sík az eredeti gúlát olyan részekre bontja, amelyek térfogatának aránya $\frac{5}{16} : \frac{11}{16} = 5 : 11$.

Leírásunkban csak a teljesség kedvéért szerepeltetjük a számításokat. Tanári bemutató mellett kérdésekkel, ötletadó táblai rajzokkal segíthetünk a számítások elvégzésében.

Ha önálló feldolgozásra szánjuk a GeoGebra munkalapot, akkor bővíthetjük a számítási ötletek megtalálását szolgáló *Segítségekkel*, és az eredmény ellenőrzésére szolgáló *Beviteli mező*vel. A *Beviteli mező* alkalmazására jó példák bőségesen találhatók a GeoGebra adatbázisban. Ilyen például a https://www.geogebra.org/m/eR9S9Epw munkalap, amely egy térgeometriai témához, a csonkakúp térfogatának kiszámításához 2D környezetben készült (Száldobágyi).

A GeoGebra 3D-s nézet használata nélkül is végezhetünk térbeli vizsgálatokat. A 7.9. ábra egy olyan GeoGebra munkalap képernyőkivágásait mutatja, amelyben *Szerkesztés – Kép beszúrása – Fájl* parancssorral két részletben (felső és alsó rész) beolvastuk M. C. Escher Belvedere című képét. A felső részt változatlanul, az alsó részt viszont ugyanarra a helyre kétféleképpen olvastuk be – az egyik változat az eredeti állás, a másik a vízszintesen tükrözött változat. Létrehoztunk egy *Csúszkát*, és úgy állítottuk be a láthatóságot, hogy a Csúszka $n = 0$ értékénél az eredeti, a „lehetetlen” épület, az $n = 1$ érték mellett pedig a trükköt leleplező tükörkép látható.




7.9. ábra. M. C. Escher Belvedere című képének titka
(Vásárhelyi 2018a https://ggbm.at/QbuT5Hcs).
(Forrás: https://en.wikipedia.org/wiki/Belvedere_(M._C._Escher))

A képhez kapcsolódóan számos probléma vethető fel (centrális vetítés, projektív geometria, stb. Ezekről és más ötletekről olvashatunk Koren és Vásárhelyi elektronikus jegyzetében: https://ttomc.elte.hu/publications/68

# Irodalomjegyzék

[1] Hajnal Imre, dr. Nemetz Tibor, dr. Pintér Lajos, dr. Urbán János (1982). Matematika. Fakultatív B változat. Gimnázium IV. osztály, Nemzeti Tankönyv-

kiadó

[2] Koren Balázs, Vásárhelyi Éva (2013). Goemetria tanároknak. Elektronikus jegyzet. https://ttomc.elte.hu/publications/68

[3] Száldobágyi Zsigmond: Csonka-kúp térfogata GeoGebra munkalap. https://www.geogebra.org/m/eR9S9Epw

[4] Vásárhelyi, É. (2018a). A Belvedere titka – GeoGebra munkalap. https://ggbm.at/QbuT5Hcs

[5] Vásárhelyi, É. (2018b). A kocka, a kockába írt szabályos tetraéder és a szabályos oktaéder láthatósága Jelölőnégyzettel szabályozva. https://ggbm.at/gr292jkN

[6] Vásárhelyi, É. (2018c). Kockába írt szabályos tetraéder és oktaéder Csúszkával szabályozva – GeoGebra munkalap. https://ggbm.at/wTfsh8qV

[7] Vásárhelyi, É. (2018d). Szabályos négyoldalú gúla metszete síkkal – GeoGebra munkalap. https://ggbm.at/J9KmhzeA

[8] Wertheimer, M. (1912). Experimentelle Studien über das Sehen von Bewegung. (A mozgáslátás kísérleti vizsgálatai) Zeitschrift für Psychologie, 61, 161–265. [Experimental Studies on the Seeing of Motion. English translation in T. Shipley, ed., Classics in Psychology. New York: Philosophical Library, 1961]

*Vásárhelyi Éva*
*ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központ*

*Vásárhelyi Éva nyugalmazott egyetemi docens. Matematika, fizika, ábrázoló szakos ábrázoló geometria szakos tanárként végzett az ELTE TTK-n. Geometriából és pedagógiából egyetemi doktori címet, matematikából kandidátusi fokozatot szerzett. Az ELTE TTK Geometriai tanszék, majd nyugdíjazásáig a Matematikatanítási és Módszertani Központ oktatója, utóbb vezetője volt. Az oktatásban és a kutatásban is a geometria állt érdeklődésének középpontjában. 1993. óta foglalkozik a dinamikus geometria programok alkalmazásával. Több országban tanított és kutatott (Moldávia, Franciaország, Lengyelország, Ausztria), Mind ez idő alatt igyekezett népszerűsíteni a korszerű geometriai szemléltetést.*

## Helló, Ruby! Kalandozások Kódföldén
**(2018. június, Könyvespolc – ajánló)**

A programozás ma már egyre inkább életünk természetes része. Ennek a 112 oldalas, gazdagon illusztrált és színes könyvnek a célja az, hogy a gyermekek minél korábban megbarátkozzanak a programozással kapcsolatos általános fogalmakkal és alapelvekkel.

A szerző *Linda Liukas*, Helsinkiben élő programozó, író és illusztrátor. Egyik alapítója volt a *Rails Girls* nevű mozgalomnak, amely azt tűzte ki küldetéséül, hogy világszerte minél több fiatal nő megismerkedhessen a programozás alapjaival. Önkéntesek segítségével ennek a szervezetnek néhány év alatt 270 városban több mint tízezer nőt sikerült elérnie. Linda a New York-i székhelyű, programozást oktató Codeacademy nevű cégnél is dolgozott. 2013-ban megkapta a Ruby programozói közösség legrangosabb díját, a *Ruby Hero* díjat, de büszkén viseli a *Finnország Digitális Bajnoka (Digital Champion)* címet is.

A könyv megírásának gondolata a szerzőben már 2009-ben felmerült. Később a *Kickstarter* közösségi finanszírozásának segítségével a könyvre Linda mindössze három óra alatt 10 ezer dollárt, az első 24 órában 100 ezer dollárt, végül összesen 380 ezer dollárt gyűjtött össze! Linda élete gyökeresen megváltozott – úgy döntött, hogy felmond a *Codeacademy*-nél, hogy teljes erejével az írásra koncentrálhasson. Könyvéhez a rajzokat saját maga készítette. Művét angolul 2015-ben, magyarul 2016-ban adták ki. A könyv eddig 20-nál több nyelven jelent meg.

A könyv két részből áll. Az első, könnyen és gyorsan olvasható részben 68 oldalon 10 fejezetre bontva egy kedves történetet követhetünk nyomon: a főszereplő kislány, Ruby azt a feladatot kapja, hogy keresse meg az apukája által elrejtett öt drágakövet. Útját öt barát kíséri végig, karaktereik mind valamilyen konkrét szoftverre utalnak – pingvin, kígyó, hópárduc, robot és róka (vagyis Linux, Python, Snow Leopard, Android és Firefox). Az első rész önmagában kerek egészt alkot, és olvasása (például kisebbeknek) itt akár be is fejezhető. A könyv második részében 10 feladatsor található, amelyek vagy az első rész után, vagy akár az első rész megfelelő fejezeteivel párhuzamosan is olvashatók. A könyvet fogalomtár zárja. Az érdeklődők több egyéb érdekességet (például kinyomtatható játékos feladatlapokat) tölthetnek le a https://www.helloruby.com/ oldalról.

A *Hello, Ruby!* nem konkrét programozási nyelvet tanít (tehát nem szól magáról a Ruby programnyelvről sem). Helyette az elsőre talán absztraktnak tűnő fogalmakkal ismerkedünk meg, történeteken, példákon és feladatokon keresztül – karakterláncokkal, logikai kifejezésekkel, változókkal, adatokkal, adatszerkezetekkel (zöldségek és gyümölcsök), függvényekkel, eljárásokkal, ismétléssel/ciklusokkal (eltáncolható-eltapsolható mozdulatsorok), elágazással (ültetés és gyomlálás), sorozatokkal, utasítássorozatokkal (fogmosás), kiválasztással, algoritmusokkal, részekre bontással, mintázatok felismerésével (Ruby ruhatárában vagy tapéták között), absztrakcióval, automatizálással, logikus és kritikus gondolkodással, tervezéssel, együttműködéssel, hibakereséssel, vagy a számítógépes gondolkodás fogalmával (*computational thinking*, ami a probléma olyan átfogalmazása, hogy azt a számítógép meg tudja oldani).

A szerző azt javasolja, hogy a gyerekek szülői segítséggel dolgozzák fel a könyvet. A könyv véleményünk szerint már 5–6 évesek számára, illetve által is olvasható, bár egyes feladatok megoldása 12–13 éveseket is gondolkodtatásra késztethet. A könyv hossza és felépítése jól el van találva, a történet fordulatos, nehéz abbahagyni az olvasását.

A *Helló, Ruby! Kalandozások kódföldén* egy négy részesre tervezett sorozat első kötetét alkotja. A második, valamivel rövidebb kötet, *Helló, Ruby! Nagy utazás a számítógép belsejébe* már magyarul is kapható, és szintén izgalmas feladatokat tartalmaz. Az internetről szóló harmadik kötet angolul előrendelhető. Az érdeklődőknek végül – további kedvcsinálóként – Linda *A delightful way to teach kids about computers* című, lelkesítő stílusú TEDx-előadását ajánljuk.

https://hvgkonyvek.hu/konyv/hello-ruby-kalandozasok-kodfolden

*Lóczi-Nagy Gemma*
*Lóczi Lajos*

*Lóczi-Nagy Gemma hobbija az olvasás és a zene. Könyvespolcán főleg tudományos és mérnöki ismeretterjesztő könyvek találhatók.*

*Lóczi Lajos matematikus, az ELTE és a BME oktatója. Munkájában és kutatásaiban a Wolfram-programnyelv alkalmazása kiemelt helyen szerepel.*

# Lendületben a kvantum-információelmélet – Interjú Mosonyi Milánnal
## (2019. június, Portré – Interjú)

*A Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen 2019 februárjában beszélgettünk Mosonyi Milánnal, a BME Természettudományi Kar Matematika Intézet Analízis Tanszékének egyetemi docensével. Hol végezte a tanulmányait?*

A Veres Péter Gimnáziumba jártam, utána a BME-re jöttem mérnök-fizikus szakra, majd az első év után párhuzamosan elkezdtem az ELTE-n a matematikus szakot. Ezen a két helyen diplomáztam. A doktori tanulmányaimat itt kezdtem a BME-n Petz Dénes témavezetésével, az utolsó évet pedig Leuvenben töltöttem Belgiumban, ahol Mark Fannes volt a témavezetőm. A doktori után visszatértem a BME-re, itt voltam adjunktus egy évig, utána pedig különböző kutatói állásokban külföldön dolgoztam 10 évig. 2016-ban jöttem haza ismét, azóta a BME Analízis Tanszékén kutatok és tanítok, jelenleg docensi beosztásban.

*Mi volt az oka, hogy egy év után felvette a matematikus szakot is?*

Rájöttem, hogy közelebb áll hozzám a matematika, mint a fizika, jobban szeretem az absztraktabb és precízebb dolgokat. Igazából már a gimnáziumban is jobban érdekelt a matematika, de a versenyeredményeim alapján nem voltam biztos benne, hogy elég jó vagyok ahhoz, hogy matematikus legyek. Aztán az egyetemen kiderült, hogy a felsőbb matematika világa nagyon más, mint a középiskolai versenyeké, és nem feltétlenül ugyanazokra az adottságokra van szükség az egyikben, mint a másikban.

*Így utólag nézve, érdemes volt mindkét szakot elvégeznie?*

Nem. Ezt senkinek nem javaslom, különösen nem párhuzamosan. Annak van értelme, hogy az ember kiválassza, mi az, ami igazán érdekli, és aztán ebben próbáljon minél jobban elmélyedni. Ha ez történetesen valami interdiszciplináris irány, mint esetemben például a matematikai fizika, akkor ki kell választani egy olyan képzést, ami a lehető legjobban lefedi a választott irányt (ez esetben a matematikus szak), és a mellé lehet hallgatni válogatott tárgyakat más szakok kínálatából, például elméleti fizika tárgyakat a fizikus szakról. De ehhez nem kell az egész fizikus szakot elvégezni, sőt, nem is praktikus.

*Melyek voltak a külföldi kutatói állásainak kutatási témái?*

Kutatási témám a kvantum-információelmélet, ezzel foglalkoztam már doktoranduszként és külföldön is.

*Kérem, meséljen erről a témáról!*

Az információelmélet kezdetét Claude E. Shannon amerikai matematikus és villamosmérnök egy 1948-as cikkétől[7] számítják. Shannon ebben a cikkben két alapkérdést vizsgált. Az egyik, hogy hogyan lehet információt optimálisan tömöríteni úgy, hogy ne vesszen el túl sok a tartalmából. A másik kérdés, hogy hogyan lehet zajos csatornán megbízhatóan információt továbbítani. Az ő egyik alapgondolata az információ, és az információ kezelésének a matematikai modellezésében az volt, hogy az információ forrását véletlen matematikai szimbólumok sorozataként tekintette. Például egy magyar nyelvű szövegre tekinthet úgy is az ember, mint betűk véletlenszerű sorozatára, ahol a betűk bizonyos, a magyar nyelvre jellemző valószínűségekkel követik egymást. Egy zajos csatornát pedig úgy lehet leírni, hogy az egy adott bemeneten bizonyos valószínűséggel a kívánt kimenetet produkálja, bizonyos más valószínűségekkel viszont más kimeneteket. A Shannon-féle információelmélet tehát nagyon erősen a valószínűségszámításra épül. Fontos alapgondolat volt az is, hogy igazából mindegy, hogy fizikailag mi hordozza az információt: mindegy, hogy egy üzenetet kódoló bitsorozat (0-k és 1-esek sorozata) egy kőtáblára van írva, vagy mondjuk elektromos

[7] Claude E. Shannon: A Mathematical Theory of Communication, The Bell System Technical Journal, vol. XXVII, no. 3, 1948

kapcsolók állása jelzi a bitek értékét (bár az utóbbit nyilvánvalóan könnyebb kezelni a gyakorlati megvalósításban). De kiderült, hogy mégsem teljesen mindegy, ugyanis a kvantummechanika törvényei szerint viselkedő fizikai rendszerek leírásához egy másfajta (gazdagabb) valószínűségelméletre van szükség, mint amit például a kockadobások leírásához használunk, és amire Shannon is alapozta az elméletét. Ez a gazdagabb valószínűségelmélet gazdagabb információelméletet is eredményez, amiben a korábbinál többfajta információfogalom jelenik meg, és az információ feldolgozásának újfajta módjai és problémái. Ezt már a 60-as évek végén, 70-es évek elején elkezdték vizsgálni, de igazán nagy lendületet a 90-es évek elején kapott. Ekkor publikálta Peter Shor, az MIT-n dolgozó amerikai matematikus a Shor-algoritmust, amiben azt mutatta meg, hogy ha lenne egy kvantumszámítógépünk, akkor azzal a nagy számokat nagyon gyorsan fel lehetne bontani prímtényezők szorzatára. A „nagyon gyorsan” a számítástudomány nyelvén azt jelenti, hogy a bemenet számjegyei számának polinomiális függvénye a felbontáshoz szükséges idő. Ez többek között azért fontos, mert a gyakorlatban használt nyilvános kulcsú titkosírások azon alapszanak, hogy a küldőnek és a fogadónak is van egy-egy nagy prímszáma (ezek a kulcsok), de ezek nem ismertek a külvilág számára, csak a kettőnek a szorzata. Azért biztonságos ez a titkosítás, mert ha elég nagyok a prímszámok, akkor a jelenlegi számítógépek számítási kapacitásával nagyon hosszú időbe telne a szorzatukból visszafejteni a két prímszámot, és így feltörni a titkosítást. Shor pedig azt mutatta meg, hogy ha lenne kvantumszámítógépünk, akkor ez gyorsan menne. Ebből egyébként az is következik, hogy a nyilvános kulcsú titkosítás újfajta módszereire van szükség, amire szintén kínál megoldásokat a kvantum-információelmélet.

*Mit jelent pontosan a kvantumszámítógép fogalma?*

A kvantumszámítógép olyan számítógép, ahol a bitek, a logikai egységek, nem a klasszikus számítógépek esetén megszokott 0 vagy 1 értéket vehetik fel, hanem ezeknek úgynevezett szuperpozícióit is, amelyekből végtelen sok van. Hasonlóképp végtelen sokféle logikai kapu létezik például két kvantumbiten, szemben a klasszikus számítógépek véges sok logikai kapujával. A legfontosabb azonban, hogy több kvantumbit minőségileg másfajta módon tud összekapcsolódni, mint ugyanannyi klasszikus bit; ez az úgynevezett kvantummechanikai összefonódottság jelensége. Ennek eredményeként egy kvantumszámítógéppel gyorsan meg lehet oldani bizonyos feladatokat, amelyekre a ma használt számítógépekkel nem létezik, vagy legalábbis nem ismert hasonlóan gyors megoldás.

*Mióta foglalkoznak a kvantumszámítógépek lehetőségével? Vannak-e már kvantumszámítógépek?*

Az alapötletet Richard Feynman Nobel-díjas amerikai fizikus nevéhez szokták kötni: 1982-ben publikált egy cikket[8], amiben azt vetette fel, hogy kvantumszámítógépet lehetne használni kvantumrendszerek szimulációjára. Mondjuk egy molekulának az energiaszintjeit klasszikus számítógéppel meglehetősen nehéz precízen kiszámolni, de egy kvantumszámítógéppel sokkal hatékonyabban meg lehetne csinálni. Később különféle algoritmusokat javasoltak matematikusok, fizikusok, ami már egy kicsit más irányba mutat, tehát nem fizikai rendszerek modellezéséről szól, hanem valamilyen logikai, matematikai feladatokat kell megoldani. Ezek közül a leghíresebb a Shor-algoritmus.

Egy-két bites kvantumszámítógépeket már nagyon régóta tudnak építeni, ezek azonban csak az elmélet legegyszerűbb illusztrálására voltak jók. Az utóbbi 2-3 évben indult be igazán a fejlődés a gyakorlati megvalósítás terén. Mostanában a nagyobb tech cégek, mint például az IBM és a Google, elkezdték a saját kvantumszámítógép-fejlesztési projektjeiket és ez aztán hatalmas lendületet adott a témának. Most ott tartunk, hogy már léteznek 50 kvantumbites kvantumszámítógépek. Ezeken talán már lehet futtatni olyan, speciálisan erre a célra tervezett feladatokat, amelyekkel a jelenlegi legerősebb szuperszámítógépek sem boldogulnának belátható időn belül. Ugyanakkor ezek nem szabadon programozható számítógépek, és egyelőre egyáltalán nem világos, hogy mikor fogja a kvantumszámítógépek teljesítménye elérni akár csak a több évtizeddel ezelőtti számítógépekét; úgy tűnik, ehhez rengeteg technológiai kihívást kéne még legyőzni, és abban sem mindenki ért egyet, hogy ez egyáltalán elvileg lehetséges-e. Még nagyon sok nyitott kérdés van, ugyanakkor az biztos, hogy ez a terület nagyon nagy fejlődésen ment keresztül az utóbbi években.

*Tehát egy mai kvantumszámítógép kevesebbet tud, mint mondjuk az én mobilom?*

Igen, lényegesen kevesebbet. A két készülék más elvek alapján működik, és ahhoz, hogy a kvantumszámítógépek elméletben megjósolt előnyét valóra lehessen váltani, a jelenleginél lényegesen nagyobb kvantumszámítógépeket kéne építeni, ami viszont technikailag még nehézségekbe ütközik. A kvantumszámítógépeknél nagyon fontos, hogy a kvantumbiteket valamilyen együttes állapotba

[8]Richard P. Feynman, Simulating Physics with Computers, International Journal of Theoretical Physics, vol. 21, no. 6-7, 1982

hozza az ember. Ezeket hívják összefonódott állapotoknak, és ezek nagyon sérülékenyek a környezeti hatásokra, amik pedig elkerülhetetlenül fellépnek, hiszen nagyon nehéz teljesen izolálni egy rendszert a külvilágtól. Emiatt nagyon nehéz létrehozni, és kellően hosszú ideig fenntartani ezeket az állapotokat; ez az úgynevezett dekoherencia-probléma. Vagyis nem tudják elég sokáig, és elég hatékonyan izolálni a kvantumszámítógépet a környezetétől ahhoz, hogy egy hosszabb számítási folyamatot végigfuttassanak, illetve maguknak a logikai kapuknak a pontos fizikai megvalósítása is meglehetősen nehéz, nagy kihívást jelentő feladat. Egy másik nagyon fontos tényező, hogy a klasszikus számítógépeknél a zajnak nagyon pici szerepe van, a kvantumszámítógépeknél pedig nagyon nagy. Tehát ha nem pontosan azt a kaput sikerül implementálni fizikailag, mint amit akartak, vagy nem pont azt az állapotot sikerül létrehozni ezekben a kvantumbitekben, amit akartak, akkor ez nagyon nagy mértékben befolyásolhatja a számítás kimenetét, és ezt kontrollálni vagy javítani megint csak körülményes és nehéz probléma.

*Térjünk vissza most az Ön közelebbi kutatási területéhez.*

Én a Shannon-féle információelmélet kvantummechanikai megfelelőjével foglalkozom leginkább, információtömörítéssel, csatornakapacitásokkal, különböző matematikai entrópiafogalmakkal, és ezeknek az összefüggéseivel. Alapvetően azt vizsgálom, illetve vizsgáljuk – jelenleg egy Lendület kutatócsoportot vezetek –, hogy különböző kvantum-információelméleti problémákban, mint például a fent említettek, mi az elméletileg elérhető legjobb teljesítmény. Ezt próbáljuk leírni, illetve összekapcsolni az információ különböző mértékeivel. Ez részint azért fontos, mert ezekhez az elméleti korlátokhoz viszonyítva lehet később eldönteni, hogy mennyire jó egy-egy konkrét gyakorlati eljárás az adott problémák megoldására. Másrészt pedig azok a mennyiségek, amelyek a megoldásainkban megjelennek, megmutatják, hogy melyek a kvantummechanikai információ gyakorlati szempontból is fontos mérőszámai.

*Hogyan alakult meg a kutatócsoportjuk?*

2016 szeptemberében jöttem haza külföldről; akkor még nem volt a BME-n – és az országban sem – ilyen témával foglalkozó kutatócsoport. Viszont voltak a BME Matematika Intézetben olyan fiatal kutatók és oktatók, akik korábbi külföldi posztdoktori munkájuk során foglalkoztak kvantum-információelmélettel. Szemináriumokat szerveztünk, elkezdtünk közösen dolgozni. Egy évvel később nyertem el az első NKFIH-s (a korábbi OTKA) kutatási pályázatot, és egy évre rá a Lendület pályázatot, ami az előbbinél lényegesen nagyobb volumenű anyagi támogatást jelent.

*Ebből most hány kutató tud dolgozni?*

Maga a Lendület pályázat két kutató teljes állására elég, de más támogatási forrásokat is tudunk használni, amiből jelenleg hét-nyolc szenior kutató, egy doktorandusz hallgató, és két mesterképzésben résztvevő hallgató teljes vagy részleges alkalmazását, illetve kutatási költségeit tudjuk fizetni.

*Folyik-e hasonló kutatás máshol Magyarországon?*

Pont ilyen nem. A kvantum-információelmélettel nagyon sok tudományterület képviselői foglalkoznak különböző aspektusokból, a matematikától, számítástudománytól kezdve az elméleti fizikán át a kísérleti szilárdtest-fizikáig, az optikáig és a mérnöki tudományokig. Az MTA Wigner Kutatóintézetben és itt, a BME-n is van több elméleti és kísérleti fizikai kutatócsoport, akik kapcsolódó témákkal foglalkoznak, a BME Villamosmérnöki Karán kvantumkriptográfiai fejlesztéseken dolgoznak, Debrecenben pedig a kvantumkorrelációk alaposabb megértését kutatják elméleti fizikusok. Mi a spektrum „legmatematikusabb" végén vagyunk; a kvantum-információelmélet Shannon-féle megközelítésével itthon csak mi foglalkozunk. Egy még absztraktabb matematikai irányt képviselt volt témavezetőm, Petz Dénes, aki a kvantum-információelmélet és kvantum-valószínűségelmélet operátoralgebrai megközelítésének rendkívül elismert és nagy hatású kutatója volt, de ő az utóbbi években betegsége miatt nem tudott érdemben kutatással foglalkozni, és egy évvel ezelőtt sajnos el is hunyt. A csoportunk kutatási iránya sok szempontból az ő munkássága természetes folytatásának tekinthető, annál is inkább, mert a csoportnak több volt tanítványa is tagja.

*Amit Önök csinálnak, az tisztán alapkutatás, mások pedig talán közelebb állnak az alkalmazott kutatáshoz?*

Igen, bár nem tudom, mennyire lehet éles határt vonni a kettő között. Most voltam például egy konferencián Coloradóban, a kvantum-információelmélet legnagyobb éves konferenciáján (QIP). Meghívtak, hogy tartsak egy áttekintő előadást kvantumentrópiákról, ezeknek a matematikájáról és kvantum-információelméleti szerepéről. Ennek a konferenciának a fő szponzorai között volt a Google, az IBM, a Microsoft, az Alibaba, a Baidu, és egyéb tech óriások, amelyek képviselői állástoborzó előadásokat is tartottak a konferencián. Előadásaikból az is kiderült, hogy e cégek közül többnek a kvantumtechnológiai kutatási részlegét olyan kutatók vezetik, akik kimondottan elméleti alapkutatásban voltak korábban aktívak. Azt hiszem, ez is jól példázza, hogy az alkalmazott kutatások, technológiai fejlesztések mennyire szorosan épülnek az alapkutatásokra; az utóbbi nélkül az alkalmazások sem jöhetnének létre.

*Tíz évet töltött külföldön, ez mennyiben járult hozzá, hogy ma ennek a területnek a szakértőjeként tartják számon, jobbak voltak-e a lehetőségei, mintha itthon maradt volna?*

A külföldi tartózkodásom alatt számos kiváló kutatóval kerültem szakmai kapcsolatba, közülük többekkel azóta is dolgozunk közös projekteken. Ebben sokat számított a kinti intézmények, csoportok hazaihoz viszonyított lényegesen jobb anyagi helyzete, aminek köszönhetően sosem jelentett problémát egy-egy konferenciára elmenni. Maguk a csoportok is általában nagyobbak voltak, sok fiatal kutatóval, illetve rendszeresen voltak látogatók más intézményekből szemináriumokat tartani, hosszabb-rövidebb ideig együtt dolgozni a csoporttal. Ezek a lehetőségek sokat segítenek abban, hogy a szélesebb kutatói közösség megismerje az ember munkáját, illetve az így létrejövő személyes ismeretségek sokat számítanak a szakmai kapcsolatok kialakításában is. A Lendület pályázat támogatása egyébként nagyban hozzájárul ahhoz, hogy itthon is megteremtsük ezeket a feltételeket.

Ugyanakkor a külföldi intézmények jellemzően jobb anyagi lehetőségeitől függetlenül is azt gondolom, hogy nagyon fontos és hasznos minden fiatal kutatónak eltölteni pár évet külföldön, lehetőleg több különböző helyen, megismerni más kutatói, intézményi kultúrákat, mentalitásokat, amiket aztán beépíthet a saját kutatói gyakorlatába. Nekem például sokat segített a pályázatokon való indulásban, és bizonyára ezek sikerességében is, hogy a külföldi csoportokban egy ebből a szempontból ambiciózusabb mentalitással találkoztam, ahol természetes volt, hogy a fiatal kutatók is pályáznak rangos kutatási támogatásokra (Marie Curie, ERC), és a kutatócsoportoknak folyamatosan van bevétele külső pályázati forrásokból.

*Milyen volt az első pályázata? Hiszen a pályázást is meg kell tanulni, nyilván az első a legnehezebb, utána egyre könnyebben megy.*

Ez így van, ez is egy külön műfaj, amibe bele kell tanulni. Az első komolyabb pályázatom egy japán posztdoktori ösztöndíj volt, azzal nagyjából három hetet szenvedtem, pedig csak 2-2 oldalt kellett írni a korábbi eredményeimről és a kutatási terveimről. A pályázatok megírásával töltött idő egyébként azóta sem változott sokat, csak a pályázatok lettek egyre komolyabbak. A Lendület pályázatom 76 oldalas volt, igaz, ennek egy jelentős részét a résztvevők önéletrajzai és publikációs listái tették ki, ugyanakkor mondjuk a csupán 2-3 oldalas költségterv összeállítása több napi munka volt. Nekem a legnagyobb kihívást az okozta régebben, hogy hogyan tudom jól „eladni” magamat és a témámat, elhinni és elhitetni, hogy az utóbbi tényleg fontos, én pedig megérdemlem a támogatást, hogy ezzel foglalkozzam. Azt hiszem, ebben szerepe volt annak az oktatási rendszernek is, amiben szocializálódtam, legalábbis a külföldi csoportokban megismert kutatókat rutinosabbnak, magabiztosabbnak láttam ezen a téren. Nagy segítség volt a magabiztosabb stílus elsajátításában, hogy tanulhattam más, tapasztaltabb pályázók anyagaiból, és persze a korábbi sikeres pályázataim is önbizalmat adnak az újabb pályázatokhoz.

*Szakmailag és anyagilag is megérte tíz évet kint tölteni?*

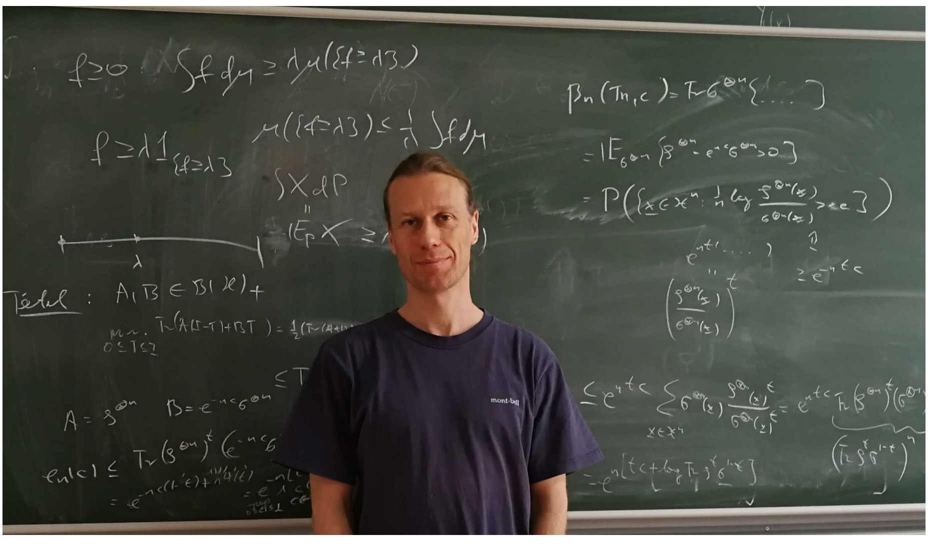
Szakmai szempontból mindenképpen megérte. Anyagi szempontból: a magyar egyetemi fizetésekhez képest külföldön mindenhol lényegesen többet kerestem, de ebben is nagy eltérések voltak, a finanszírozás forrásától függően, az pedig, hogy a magasabb fizetés mekkora többletet jelent anyagilag, nagyon függ a megélhetési költségektől is. Egy sima posztdoktori fizetésből általában azért nem nagyon lehet félretenni, (kivéve mondjuk Svájcban vagy Dániában, vagy egyéb olyan országban, ahol egyébként is nagyon magasak a fizetések), de vannak olyan ösztöndíjak, pl. a Marie Curie ösztöndíj, ahol egy külföldi professzori fizetésnek megfelelő összeget fizetnek, amiből kényelmesen meg lehet élni, akár családdal is. De attól is függ, hol van az ember; például Anglián belül Londonban a megélhetés sokkal magasabb költségekkel jár, mint mondjuk Bristolban, ahol én voltam. Amikor Münchenben dolgoztam, az ottani keresetemből nem tudtam félrerakni, mert annyira drága volt a lakásbérlés és az élet. Itthon van egy saját lakásom, nem fizetek lakbért, ezeket is mérlegelni kell, amikor összehasonlítjuk a külföldi és az itthoni fizetéseket.

*Egyedülállóként valamivel könnyebb lehetett Önnek, azoknak bizonyára nehezebb a dolguk, akik házastárssal, gyerekkel szeretnének külföldön kutatómunkát végezni.*

Nehezebb, de azért sokan vannak, akik családdal is eltöltenek pár évet külföldön posztdoktori ösztöndíjakkal. Ez azon is múlik, hogy milyen az összetétele a párnak, az a legnehezebb, ha mind a ketten kutatók, hisz arra nagyon kicsi az esély, hogy ugyanoda kapjanak ösztöndíjat, de ha mondjuk valamelyikük az IT szektorban dolgozik, akkor bármelyik nagyobb városban szinte azonnal tud állást találni.

*Harmadik éve itthon van, mik a további tervei?*

Most indult 2018 szeptemberében a Lendület csoportom, öt évig szeretném ezt a csoportot sikerrel vezetni, kihozni ebből a kutatásból a lehető legtöbbet. Amikor külföldön posztdok státuszban voltam, a témámban szabadon kutathattam, azzal foglalkoztam, amivel akartam, nem nagyon voltak más kötelezettségeim, de nem is volt lehetőségem arra, hogy magam köré gyűjtsek embereket és valami kicsit nagyobbat felépítsek magam körül. Itthon a Lendület nagyon jó körülményeket biztosít erre, és a Matematika Intézet vezetése is nagyon támogatóan áll hozzánk. Nagy szabadságom van például abban, hogy mit tanítok, így lehetőségem van olyan tárgyakat kidolgozni és tanítani, amik szorosan kapcsolódnak a kutatási témámhoz, és ezeken keresztül tehetséges hallgatók érdeklődését felkelteni a téma iránt. Az egyik fő célunk most, hogy minél több hallgatót sikerüljön bevonni a munkánkba, akik közül néhányan remélhetőleg hosszabb távon is erősítenék majd a csoportot.



*Miért választotta ezt az életpályát?*

Nem volt tudatos választás, egyik állomás követte a másikat, középiskola után egyetem, majd a doktori, a posztdoktori állások, sosem merült fel igazán komolyan, hogy más irányba menjek. De a legfőbb érv talán az, hogy szeretek matekozni, és erre a kutatói/egyetemi életpálya biztosítja a legnagyobb szabadságot.

*Az interjút készítette: Oláh Vera*

*Oláh Vera 1978-ban matematikus, 2014-ben természettudomány-kommunikáció diplomát szerzett az ELTE-n. 1992 és 2001 között a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok főszerkesztője, 25 éven keresztül a MATFUND Középiskolai Matematikai és Fizikai Alapítvány, 12 éven át egyúttal a Varga Tamás Alapítvány képviselője. Közel 50 éve tagja a Bolyai János Matematikai Társulatnak, amelyben aktívan tevékenykedik. 2016 óta az Érintő felelős szerkesztője.*

# Hogyan lehetünk dollármilliomosok?
# (2019. június, Gazdaság – technika – művészet)

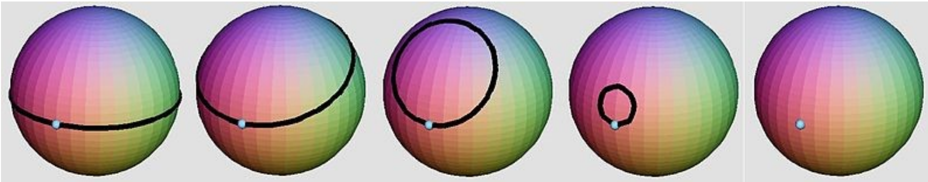
## Hogyan lehetünk dollármilliomosok a matematika segítségével – A Bitcoin sztori

### Legyél Te is milliomos… és aki nem akart az lenni

A matematikai tehetségnek sokkal több praktikus haszna van annál, mint hogy „Gondolj egy számra!” típusú feladatokkal tudjuk elkápráztatni rokonainkat és ismerőseinket. Második választott szakmám gyakorlói, a közgazdászok régóta tárt karokkal (és magas fizetésekkel) várják a matematikusokat, akik bonyolult összefüggések meglátásával és összetett modellek építésével segítenek kockázatokat csökkenteni és nyereséget növelni (igaz, néha mindez pont fordítva történik – lásd például az LTCM híres esetét).

De mi a helyzet akkor, ha gyorsan szeretnénk nagyon gazdagok lenni? Mennyire segíthet a matematika abban, hogy dollármilliomos váljon belőlünk? Ez sem lehetetlen. 2000-ben az amerikai Clay Mathematics Institute hét kérdést nevezett meg, mint a 21. század legfontosabb, megoldásra váró matematikai problémáját. A Millennium Problems gyűjtőnévvel ismerté vált kérdéshalmaz bármelyikének megoldásáért egymillió dolláros pénzjutalmat ajánlott fel az intézet.

Bár a pénzdíj valóban vonzónak tűnik, óradíjban számolva már nem biztos, hogy jobban járunk akkor, ha a millenniumi problémákkal foglalkozunk egy hagyományos karrierút helyett, hiszen a hét problémából az elmúlt 19 évben összesen egyet sikerült megoldania a világ matematikus közösségének. Ezen egyetlen megoldásnak egyébként külön érdekessége, hogy a Poincaré-sejtést 2002-ben igazoló orosz Grigorij Jakovlevics Perelman (aki egyébként az 1982-es budapesti Nemzetközi Matematikai Diákolimpián tökéletes eredménnyel nyert aranyérmet) nemcsak a 2006-ban a bizonyításért neki ítélt Fields-érmet, de a 2010-ben a CMI által neki ítélt az egymillió dollárt sem volt hajlandó átvenni.



10.1. ábra. A Poincaré-sejtés egy szemléltetése. (Forrás: Wikimedia Commons)

## Akinek a hírnév nem kellett

Rendben van, mondhatná a kedves olvasó, én azonban gyors meggazdagodást ígértem. A fenti problémák nyilvánvalóan nem kecsegtetnek ezzel. Mit szólna azonban az olvasó akkor, ha az egymillió dollárt mindössze tíz perc alatt megkeresné? És ehhez semmi mást nem kellene csinálnia, mint matematikai problémákat megoldania a számítógépe segítségével. És nem csak hét probléma várna megoldásra, hanem tízpercenként kapna egy újabbat. Ráadásul lényegében garantált lenne, hogy egy probléma megoldása átlagosan tíz percet vegyen igénybe. Túl szépen hangzik, hogy igaz legyen? Részben az is, de tény, hogy voltak olyan szereplők, akik számára ez a lehetőség valóban adott volt a múltban. Hogy mindezt pontosabban megértsük, ahhoz viszont meg kell ismerkednünk a Bitcoinnal.

A Bitcoin egy kriptovaluta. A szóösszetétel első fele azt jelenti, hogy titkosítási algoritmusokon alapul, míg a második fele arra utal, hogy egy fizetőeszközről beszélünk. Fontosnak tartom megjegyezni, hogy a Bitcoin nem tekinthető pénznek, ahogyan erről más platformon számos alkalommal értekeztem korábban (lásd például Most már hivatalosan is pénz a Bitcoin az USA-ban? – Economania blog). Ennek ellenére én is az általánosan használt kriptovaluta, illetve virtuális valuta elnevezéseket fogom használni. Azonban ebben az írásban minket elsősorban a titkosítás szerepe és e munka kompenzációja fog érdekelni.

A Bitcoin alapötlete egy Satoshi Nakamoto álnevű szerző (vagy szerzők) 2008 októberi cikkében lett először publikálva. A történet érdekessége, hogy a mai napig nem tudjuk, hogy kit, vagy kiket takar ez az álnév, annak ellenére, hogy Nakamoto nem csak az ötletet adta, hanem hozzá köthető a világ első blokkláncon alapuló

10.2. ábra. A Bitcoin művészi ábrázolása. (Forrás: Max Pixel)

adatbázisának megalkotása, a virtuális pénzek többszöri elköltését megakadályozó elméleti keretrendszer kidolgozása és megvalósítása, és a Bitcoin rendszer elindítása is. Magyar szál itt is van, egyesek szerint ugyanis a fenti álnév nem takar mást, mint a magyar származású programozó és vállalkozót, Nick Szabo-t, akinek egyébként a Bitcoin projekt bizonyíthatóan sokat köszönhet (Szabo természetesen cáfolja, hogy ő lenne Nakamoto).

## Kiválthatja a matematika a bankokat?

A Bitcoint kidolgozó csapat alapkérdése ez volt: hogyan lehetne egy nyílt fizetési rendszert működtetni? Egy olyat, ahol a tranzakciók lebonyolításához nincsen szükség egy központi szereplőre (bankra). Konkrétabban, egy olyan rendszert, ahol a tranzakciók validálását bárki (praktikusan a leggyorsabb, leghatékonyabb, legolcsóbb szereplő) elvégezheti. A tranzakciókat pedig egy nyilvános, mindenki által elérhető és bővíthető adatbázis tartalmazza.

A cél elérése érdekében két problémát kellett kezelni. Egyrészt biztosítani kell, hogy egy utalás csak akkor történhessen meg, ha az adott számlán megvan ennek a fedezete (ennek speciális eseteként pedig azt is, hogy nem lehet egy virtuális

## Bitcoin: A Peer-to-Peer Electronic Cash System

Satoshi Nakamoto
satoshin@gmx.com
www.bitcoin.org

**Abstract.** A purely peer-to-peer version of electronic cash would allow online payments to be sent directly from one party to another without going through a financial institution. Digital signatures provide part of the solution, but the main benefits are lost if a trusted third party is still required to prevent double-spending. We propose a solution to the double-spending problem using a peer-to-peer network. The network timestamps transactions by hashing them into an ongoing chain of hash-based proof-of-work, forming a record that cannot be changed without redoing the proof-of-work. The longest chain not only serves as proof of the sequence of events witnessed, but proof that it came from the largest pool of CPU power. As long as a majority of CPU power is controlled by nodes that are not cooperating to attack the network, they'll generate the longest chain and outpace attackers. The network itself requires minimal structure. Messages are broadcast on a best effort basis, and nodes can leave and rejoin the network at will, accepting the longest proof-of-work chain as proof of what happened while they were gone.

### 1. Introduction

Commerce on the Internet has come to rely almost exclusively on financial institutions serving as trusted third parties to process electronic payments. While the system works well enough for most transactions, it still suffers from the inherent weaknesses of the trust based model. Completely non-reversible transactions are not really possible, since financial institutions cannot avoid mediating disputes. The cost of mediation increases transaction costs, limiting the minimum practical transaction size and cutting off the possibility for small casual transactions, and there is a broader cost in the loss of ability to make non-reversible payments for non-reversible services. With the possibility of reversal, the need for trust spreads. Merchants must be wary of their customers, hassling them for more information than they would otherwise need. A certain percentage of fraud is accepted as unavoidable. These costs and payment uncertainties can be avoided in person by using physical currency, but no mechanism exists to make payments over a communications channel without a trusted party.

What is needed is an electronic payment system based on cryptographic proof instead of trust, allowing any two willing parties to transact directly with each other without the need for a trusted third party. Transactions that are computationally impractical to reverse would protect sellers from fraud, and routine escrow mechanisms could easily be implemented to protect buyers. In this paper, we propose a solution to the double-spending problem using a peer-to-peer distributed timestamp server to generate computational proof of the chronological order of transactions. The system is secure as long as honest nodes collectively control more CPU power than any cooperating group of attacker nodes.

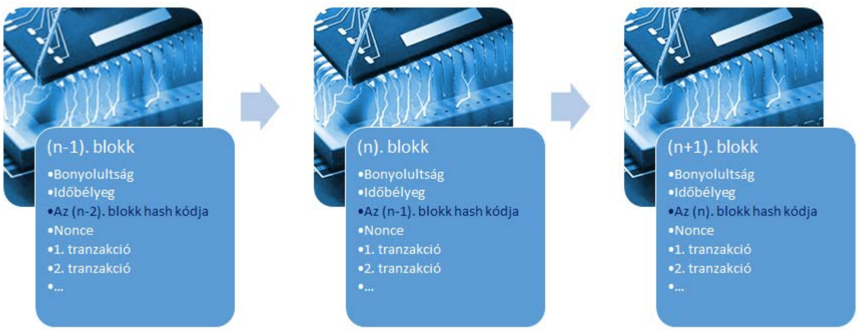
1

10.3. ábra. Satoshi Nakamoto eredeti cikkének első oldala.
(Forrás: https://bitcoin.org/bitcoin.pdf)

valutát kétszer elkölteni). Másrészt garantálni kell azt is, hogy a múltbeli tranzakciókat tartalmazó listát senki se tudja módosítani. E két feltétel hiányában senki sem bízna az adott kriptovalutában, hiszen fedezet nélküli utalás lehetősége esetén nem lenne értéke (ki fizetne egy olyan eszközért, melyet egy utalással maga is bármikor létrehozhat), a múltban megtörtént tranzakciók megváltoztathatósága esetén pedig senki sem lenne hajlandó utalást fogadni (nem lehetne biztos abban, hogy a megkapott összeg később is rendelkezésére áll majd).

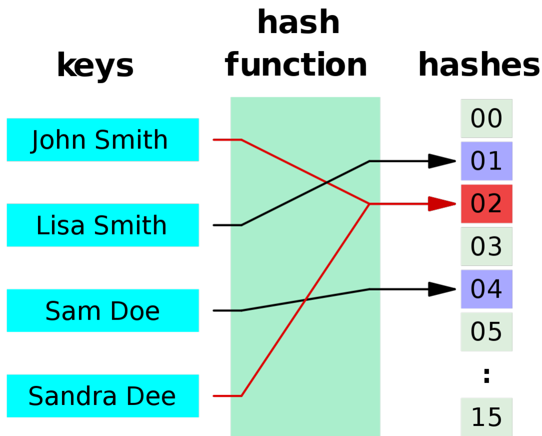
## A kriptográfia színre lép

A fenti két problémát Nakamoto és társai egy zseniális ötlettel oldották meg. A rendszer a tranzakciókat nem egy hosszú listában, hanem blokkokban tárolja. Egy blokk egy nagyjából 10 perces időszelet tranzakcióit gyűjti össze. Azonban nemcsak a tranzakciók listáját tartalmazza a blokk, hanem egyebek mellett egy időbélyeget, egy később még fontos szereppel bíró, részben véletlenszerű számsort (a nonce-ot), valamint egy, az előző blokk minden adatának figyelembevételével, egy bonyolult, kriptográfián alapuló függvény (hash-függvény) segítségével képezett kódot, az úgynevezett hash-t. A hash garantálja azt, hogy az egyes blokkok láncot fognak alkotni, hiszen a hash-kód által minden egyes blokk hozzá van kötve az előzőhöz (mivel az előző blokk adatain alapul az adott blokk által tartalmazott hash-kód). A blokkok teljes láncolatát hívjuk blokkláncnak.




10.4. ábra. A blokklánc. (Forrás: a szerző saját illusztrációja)

A hash-kód nagyon hasonló a számítástechnikában és a bankszámlák számlaszámában használt ellenőrző kódhoz. Egy blokkhoz egyértelműen meghatározható a hash-kód. Fontos továbbá, hogy a blokk tartalmának minimális megváltoztatása esetén a függvény teljesen más hash-kódot eredményez. Nem lényeges a működés szempontjából, de érdemes megemlíteni, hogy a hash-függvény nem kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés. Azaz elképzelhető, hogy a függvény két különböző tartalmú blokkhoz is ugyanazt a hash-kódot rendeli.




10.5. ábra. A hash-függvény. (Forrás: Wikimedia Commons)

További fontos eleme a Bitcoin rendszerének, hogy a hash-kód nem lehet tetszőleges, hanem kisebbnek kell lennie egy, a rendszer által megszabott, és folyamatosan felülvizsgált értéknél. Ez gyakorlatilag azt jelenti, hogy a 256 hosszú hexadecimális hash-kódnak megadott számú nullával kell kezdődnie. A nullák elvárt száma határozza meg a nonce megtalálásának nehézségi fokát.

## A tízperces matematikafeladvány

A tízperces tranzakciós listát jóváhagyó (validáló) szereplőnek kettős feladata van. Egyrészt ellenőriznie kell, hogy a listában minden egyes tranzakciónak rendelkezésre áll a fedezete. Másrészt találnia kell egy olyan véletlenszerű számsort, amelyet a fent már említett nonce helyére beillesztve a hash-függvény által generált kód megfelel az elvásároknak, azaz megfelelő számú nulla van az elején. Ez viszont nem könnyű feladat. A hash-függvény jellege miatt a nonce megtalálása lényegében próba–szerencse alapon történik. Ha a feladat bonyolultsága (azaz a hash-kód elején álló nullák száma) eggyel nő, akkor – mivel hexadecimális számról van szó – egy alkalmas nonce megtalálásának esélye 1/16-odára csökken. Azaz a nullák elvárt száma valóban összefügg a feladat nehézségével.

A cikk írásának pillanatában a Bitcoin blokklánc az 576 436. blokknál tartott, amelynek hash-kódja

000000000000000000133f916f78107e842e6f531e65999d4668649bedb4131c.

Ez a kód 18 darab nullával kezdődik, azaz megtalálása jóval nehezebb volt, mint a legelső blokk hash-kódjának megtalálása. Az első kód

000000000019d6689c085ae165831e934ff763ae46a2a6c172b3f1b60a8ce26f

volt, amely ugyan 10 nullával kezdődött, ekkor azonban még csak 8 darab kezdő nulla volt a hash-kóddal szembeni elvárás a Bitcoin rendszerében.

<< Előző **Blokkolások:17/05/2019** Következő >>

| Magasság | Idő | Átküldte | hash | Méret (kB) |
|---|---|---|---|---|
| 576436 (Fő lánc) | 2019-05-17 09:39:16 | BTC.com | 000000000000000000133f916f78107e842e6f531e65999d4668649bedb4131c | 1,274.91 |
| 576435 (Fő lánc) | 2019-05-17 09:34:16 | ViaBTC | 000000000000000000294d846973ef333a25addead11c438acc23675c55cd7f1 | 1,318.43 |
| 576434 (Fő lánc) | 2019-05-17 09:33:54 | F2Pool | 000000000000000000109da719c8660fb333b67007235c02e1b89e87970b384e | 1,117.62 |
| 576433 (Fő lánc) | 2019-05-17 09:33:32 | BTC.com | 0000000000000000001b5a828929b3cea08dea72d255ab37ea6efd4df6295ed7 | 1,183.32 |
| 576432 (Fő lánc) | 2019-05-17 09:32:01 | F2Pool | 0000000000000000000e74350567a23e43920262f6a5836b72eb26e4481b7736 | 1,180.3 |
| 576431 (Fő lánc) | 2019-05-17 09:28:01 | BTC.com | 0000000000000000001dd720c4dd34945a23c017c8c77662b09eb1764d2bb13b | 1,300.65 |
| 576430 (Fő lánc) | 2019-05-17 09:14:48 | BTC.com | 00000000000000000026e6e9ad348e15f189693ccfd04ed42f573b8a50f9c650 | 1,209.39 |
| 576429 (Fő lánc) | 2019-05-17 09:07:30 | SlushPool | 00000000000000000028a29dc97413f2d4b48a1652b3d0c299ddbadd04da6322 | 1,123.63 |
| 576428 (Fő lánc) | 2019-05-17 09:05:57 | ViaBTC | 00000000000000000017563703606993fc93ea7ad7e3d470d32aa27745b75ce3 | 1,318.23 |
| 576427 (Fő lánc) | 2019-05-17 08:59:50 | SlushPool | 00000000000000000011fbfef0dcefe0d2e7f8a9ae789b31f1a368052d048919 | 1,307.29 |
| 576426 (Fő lánc) | 2019-05-17 08:51:17 | BTC.com | 000000000000000000110654aae06fff909f9492bab325ec17bc2639fd4e9ee6 | 1,268.87 |

10.6. ábra. A Bitcoin blokklánc. (Forrás: https://www.blockchain.com/btc/blocks)

És itt jön képbe Nakamotoék zsenialitása. A feladat nehézségét (azaz a nullák elvárt számát) kéthetente felülvizsgálja és szükség esetén automatikusan módosítja a rendszer, mégpedig azzal a céllal, hogy átlagosan nagyjából 10 percig tartson egy alkalmas nonce megtalálása. De miért fontos ez? És hogyan garantálja a fejezet elején említett két probléma kiküszöbölését?

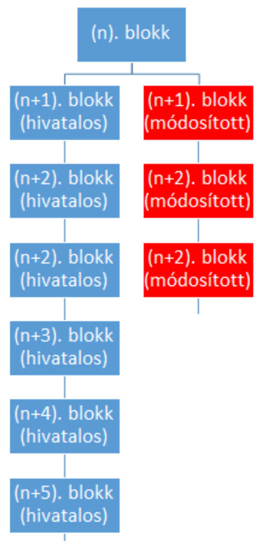
## A lottó, ahol $16^{18}$ szelvényből csak egy nyer

Az első probléma az utalások fedezetének ellenőrzése volt. Ezt a validáló szereplő elvileg megteszi. De mi a helyzet akkor, ha a hibázott, vagy szándékosan engedett meg fedezetlen tranzakciókat? Ekkor kap szerepet a blokklánc jelleg, illetve a fizetési rendszer nyíltsága. Ha a validáló szereplő fedezetlen utalást is beemelt a blokkba, akkor amint egy másik szereplő ezt észreveszi, fel fogja hívni erre a tényre a közösség figyelmét, majd ugyanerre az időintervallumra elkészíti a saját blokkját (és az ez alapján számított hash-kódját), mely nem tartalmazza az adott tételt. És a többi szereplő ezt a blokkot fogja folytatni a jövőben, azaz a hibás blokk nem lesz része a blokkláncnak, ezáltal garantálva azt, hogy fedezetlen tranzakció ne fordulhasson elő (hiszen a rendszer azokat a tranzakciókat tekinti megvalósultnak, amelyek szerepelnek a blokkláncban; azonban fontos megjegyezni, hogy bizonyos – nagyon speciális – esetekben ez a védelem nem tökéletes).

A második probléma a múltbeli tranzakciók integritásának a kérdése. Hogyan éri el a Bitcoin rendszere, hogy egyszerre legyen nyílt, azaz mindenki számára hozzáférhető, és hiteles, azaz megváltoztathatatlan? A megoldás kulcsa a bonyolultság. Mi történne például, ha valaki egy kettővel korábbi blokkot módosítani szeretne?

Ha ez a szereplő bizonyos tételeket kitörölne, módosítana vagy hozzáadna a blokkban szereplő listához, akkor a nonce-kódot is meg kellene változtatnia, hiszen a hash-kód a teljes blokk minden elemétől függ, azaz a módosított blokk a régi nonce-szal együtt szinte biztosan nem adna megfelelő számú nullával kezdődő hash-kódot. A jelenlegi bonyolultság mellett annak az esélye, hogy a régi nonce-kód a módosított blokkhoz is passzol $1 : 16^{18}$. Ennek körülbelül annyi az esélye, mint annak, hogy valaki a világegyetem kezdete óta egyszerre 150 országban játszva minden héten és minden országban megnyeri az ötös lottó főnyereményét (és most tekintsünk el attól, hogy az említett időintervallum nagy részében nem hogy lottó, de országok, sőt, emberek sem voltak). Azaz bátran kijelenthetjük, hogy nem túl valószínű eseményről beszélünk.

Mivel egy blokk létrehozása körülbelül 10 percet vesz igénybe, így ennyi időre lenne a fenti fiktív szereplőnek is szüksége ahhoz, hogy a módosított blokk hashkódját megtalálja. A blokklánc jelleg miatt azonban ekkor még nem lenne készen, hiszen a következő blokk tartalmazza az előző blokk hash-kódját, így a következő blokkot is újra kellene generálnia, még akkor is, ha az abban szereplő tranzakciókat nem akarja megmásítani. És mivel a példában szereplő személy kettővel korábbi blokkot szeretett volna módosítani, így még egy blokk hash-kódját is meg kell találnia.




10.7. ábra. Eredeti és módosított blokklánc. (Forrás: a szerző saját illusztrációja)

De miért gond ez, kérdezhetné az olvasó? Hiszen mindössze harminc perc munkával el tudta érni a célját, meg tudta változtatni a múltbeli tranzakciókat. A probléma csak az, hogy ez alatt a harminc perc alatt az eredeti blokklánc három újabb blokkal bővült, hiszen a többi – becsületes – validáló ugyanúgy dolgozott ez idő alatt, mint példánk főszereplője. Így antihősünk blokklánca továbbra is három elemmel rövidebb lenne, mint a valódi blokklánc. És ezt a hátrányát soha nem tudná behozni. Ez az oka annak, hogy a múlt nem módosítható a Bitcoin rendszerében, hiszen a két blokklánc hossza alapján mindenki számára nyilvánvaló lenne, hogy melyik az eredeti és melyik a módosított lánc.

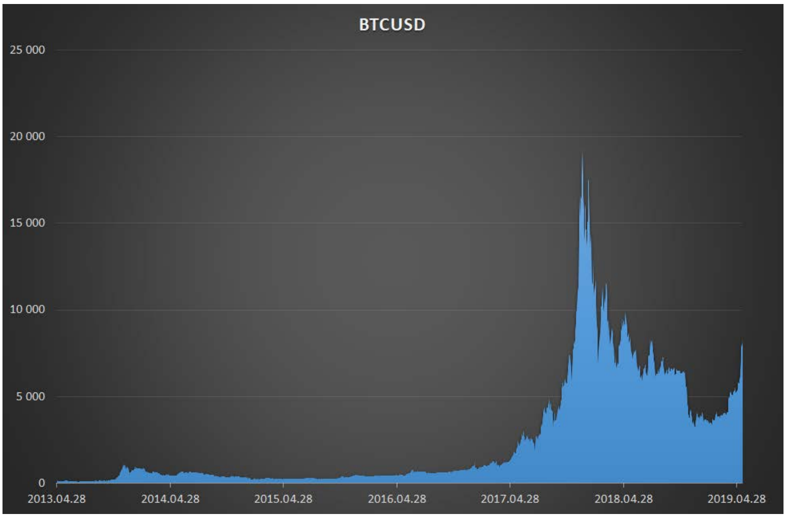
## Hatmillió dolláros órabér

Mindez érdekes, de hol van az írás elején ígért egymillió dollárunk? Rövidesen ide is eljutunk. A validáló értékes munkát végez a Bitcoin-hálózat szempontjából, hiszen biztosítja a fizetési hálózat megbízhatóságát és működését. Emellett tényleges költségei is felmerülnek, mint a hardverek beszerzése és a felhasznált elektromos áram ára (és ez utóbbi nem kis tétel, 2014-ben a Bitcoin rendszer validátorai nagyjából annyi elektromos áramot használtak fel, mint egész Írország). Ezért a közösség részéről megvan a hajlandóság, a validátor részéről pedig az elvárás arra, hogy munkájáért pénzbeli ellentételezésben részesüljön. Ennek egyik része az egyes tranzakcióban részt vevő felek önkéntes felajánlása, míg másik része friss, ropogós, a validálás megtörténtekor „kinyomtatott” új Bitcoin (a szóképek itt természetesen nagyon képletesen értendők, hiszen virtuális valutáról beszélünk, azaz tényleges fizikai előállítás nem történik, egyszerűen csak jóváírják a megfelelő összeget a validátor Bitcoin-számláján).

A kriptovaluták esetében a validálást – az arany analógiájára – bányászatnak hívják. A fent bemutatott ellentételezések tehát a bányászat költségeit hivatottak kompenzálni. Fontos azonban kiemelni, hogy egy adott blokk validálásán egyszerre nagyon sok bányász is dolgozhat, kompenzációt azonban csak egy fog ezek közül kapni, méghozzá az, aki elsőként talál egy alkalmas nonce-ot és így hash-kódot.

A bányászat ellentételezésére frissen teremtett Bitcoin mennyisége előre meg van határozva. A legelső blokkoknál ez 50 BTC (a Bitcoin ISO-kódja) volt, amely érték 210 000 blokkonként (azaz nagyjából négyévente) feleződik. Jelenleg 12,5 BTC jár minden blokk kibányászásáért, azaz tízpercenként pontosan ennyi új Bitcoin teremtődik.

Ma komoly célgépekkel folyik a Bitcoin bányászata, melyek jelentős részét kínai vízierőművek mellé telepítették, hogy így csökkentsék a bányászat áramköltségeit. A virtuális valuta 2009-es indulás utáni első éveiben azonban egy használt laptop elég volt ahhoz, hogy egy kalandvágyó programozó BTC-ket bányásszon. A legtöbb kriptovalutát maga Satoshi Nakamoto termelte ki – egyes becslések szerint nem kevesebb, mint egymillió Bitcoinnal rendelkezik. De mások is szerencsét próbáltak, mint például a korábban már említett Nick Szabo, vagy egy másik honfitársunk, Hanyecz László, aki azzal vált híressé, hogy ő volt az, aki először fizetett Bitcoinnal. Ez a hírnév azonban nem jött ingyen, hiszen a két pizzáért 2010-ben elutalt 10 000 BTC mai értéke meghaladja a 82 millió amerikai dollárt.




10.8. ábra. Egy Bitcoin ára amerikai dollárban. (Forrás: a szerző saját illusztrációja)

Ez az összeg szemmel láthatóan jóval magasabb, mint a legtöbb általunk ismert pizza ára. Ennek az oka a Bitcoin árfolyamgörbéjének mesébe illő felrobbanása. És pontosan ez az áremelkedés az, ami fejezetcímünk állítását igazzá teszi. A virtuális valuta árfolyama 2017. december 17-én tetőzött. A csúcson 19 783,06 USD-t adtak egyetlen Bitcoin-ért (mivel nem fizikai eszközről beszélünk, így természetesen nem csak egész számú BTC-t birtokolhatunk; a Bitcoin esetében a legkisebb nyilvántartható egység 1 BTC százmilliomod része – amely mennyiség bevett neve az ötletgazda iránti tiszteletadás jeleként egy Satoshi).

Mindezek alapján az a bányász, aki a 2009 környékén használt laptopjával képernyővédő futtatása helyett Bitcoin-t bányászott, könnyedén és akár 10 percenként is megkereshetett 50 BTC-t. Ha ezt egészen 2017 végéig megtartotta és tökéletesen időzítve a csúcson eladta, akkor elmondhatja, hogy 10 perc alatt 989 153 amerikai dollárt keresett. Bár ez valamivel egymillió alatt van, a példában szereplő bányászunk valószínűleg nem panaszkodna emiatt.

## Számolhatok? Avagy hol vannak a milliók?

A Bitcoin bányászata a mai árak mellett is komoly bevétellel kecsegtet (a cikk írásának idején egy BTC körülbelül 7200 USD-t ért, azaz 10 perces munkával nagyjából 90 000 amerikai dollár, azaz valamivel több, mint 26 millió forint bevételre tehet szert a leggyorsabb bányász). Azonban egy használt laptoppal ma már labdába sem rúghatunk a hatalmas hardverparkokat üzemeltető bányászközösségekkel szemben. Így kicsi az esélye az olvasónak arra, hogy rövid, vagy akár hosszabb időn belül akárcsak forintmilliomos váljon belőle a Bitcoin bányászatával.

Ráadásul az sem valószínű, hogy a többezer létező (és a naponta keletkező számos új) kriptovaluta közül pont a Bitcoin lesz az, amelyik hosszú távon velünk marad. Ennek egyik oka az, hogy számos technikai paraméterében elavultnak számít az új trónkövetelőkhöz képest. A virtuális valuták egyébként is roppant kockázatos befektetési eszközök. Nem ritkán eleve a befektetők becsapása vagy kapzsiságának és hiszékenységének kihasználása a céljuk. Én még befektetésként sem javasolnám őket, mert a sokat hangoztatott „korlátozott mennyiség = biztos jövőbeni árnövekedés" képlet is csúsztatásra és megtévesztésre épül. Hogyan lehet hasznunkra akkor ez az írás? Hogyan fogjuk megkeresni a címben ígért egymillió dollárt?

Azt természetesen senkinek nem tudom megígérni, hogy garantáltan dollármilliomos lesz, aki jó matematikából, vagy elolvasta ezt a cikket. Az viszont látszik, hogy a blokklánc-technológia gyökeresen meg fogja változtatni a bankokat és a pénzügyi szektort, a biztosítási piacokat, a kormányzati szektort, az egészségügyet, az ingatlanpiacokat, a zeneipart, az ellátási lánc menedzsmentet, a jogi szektort, és valószínűleg a pénzpiacokon is erősödni fog a szerepe. Ez pedig azt jelenti, hogy fel fog értékelődni a kiművelt matematikai tehetségek szerepe.

Milyen készségek lesznek fontosak azok számára, akik ebben a forradalomban részt kívánnak venni? Az algebra és analízis alapjainak ismerete elengedhetetlen, de nem árt, ha tisztában van a valószínűségszámítás, az operációkutatás, a statisztika és az adatelemzés alapjaival. A kriptográfia és az informatika ismerete szinte alapkövetelmény, de természetesen jól jön az üzleti szemlélet is. És ha ez mind együtt van, akkor ki tudja… lehet, hogy pár év múlva az ő cége is fent lesz majd egy hasonló listán, és akkor egymillió dollár nem is fog már olyan soknak tűnni számára.

*Sebestyén Géza*
*Budapesti Corvinus Egyetem, MCC Gazdaságpolitikai Műhely*

*Sebestyén Géza tudományos kommunikátor, a Budapesti Corvinus Egyetem docense és az MCC Gazdaságpolitikai Műhelyének vezetője. Okleveles matematikus és közgazdász. Rendszeres médiaszereplő. Több pénzügyi intézmény munkáját is segítette és segíti.*

# József Attila egy matematikai kérdése
## (2020. december, Gazdaság – technika – művészet)

*„Földtől eloldja az eget*
*a hajnal s tiszta, lágy szavára*
*a bogarak, a gyerekek*
*kipörögnek a napvilágra;*
*a levegőben semmi pára,*
*a csilló könnyűség lebeg!*
*Az éjjel rászálltak a fákra,*
*mint kis lepkék, a levelek.”*

(József Attila: Eszmélet I.)

## 1. Személyes motiváció (bevezetés helyett)

I. Majdnem tizenöt évvel ezelőtt hallgattam néhai Rózsa Pál professzor mátrixelmélet kurzusát. Könyvének (*Bevezetés a mátrixelméletbe* [27]) legelső hivatkozására máig emlékszem, Beke Manó: *Determinánsok*, 1915 [2]. Fennakadtam rajta, hogy egyrészt komolyan, valaki egy egész könyvet írt csak a determinánsokról, másrészt hogy egy 2000 utáni szakkönyv egy 1915-ösre hivatkozik, azért ez sem mindennapi, harmadrészt, hogy milyen vicces neve van a szerzőnek.

II. Nemrégiben olvastam Tverdota György irodalomtörténész *Tizenkét vers* című könyvét ([36]), mely József Attila *Eszmélet* költeményét vizsgálja. Az *Eszmélet* láthatóan az egyik legizgalmasabb verse József Attila életművének – és mellesleg az egész 20. századi magyar lírának – abban az értelemben feltétlenül, hogy egy komplett könyvet, két könyvhosszúságú tanulmányt, és számtalan cikket írtak erről az egyetlen versről; a róla szervezett 2012-es konferencia anyagát több mint 500 oldalban adták ki. Volt, aki a marxista világképet látta benne, volt aki a marxista világkép elvetését. Elemezték pszichoanalitikusan, posztmodernként, volt aki nemes egyszerűséggel azt mondta, hogy *„vonzóereje, megfejtésének reményétől függetlenül, maga a rejtélyesség”* ([4]). Talán épp értelmezési lehetőségeinek sokfélesége teszi egyik legtalányosabb versünkké. Tverdota könyvének alapállítása, melyre a címe is utal, hogy az *Eszméletet* valójában nem egységes költeményként, hanem versciklusként lehet (és célszerű) elemezni. A *Tizenkét vers* kapcsán a legérdekesebb, hogy bár én minden vagyok, csak irodalmár nem, mégis – miközben egyes részei kimondottan mély irodalmi részletkérdésekbe merülnek – számomra is kifejezetten olvasmányos, végig érdekes, és egyáltalán: tanulságos könyv volt.

III. Közel nincs olyan olvasottságom a szépirodalomban, hogy egyáltalán merjek olyat mondani, hogy ki a „kedvenc” költőm, de tény ami tény, a *Tiszta szívvel* az egyetlen vers, amit fejből tudok (akárhányat is próbált nekem memoriterként a közoktatás megtanítani). Megmondom őszintén, még a *Himnuszt* sem biztos, hogy elejétől végéig el tudnám mondani bármikor, de a „Nincsen apám versemet” igen.

## 2. Kérdésfelvetés

Tverdota a könyvének elején, az Eszmélet keletkezésének releváns életrajzi hátterét bemutatva, tesz egy apró megjegyzést: *„Olyanfajta barátság fűzhette össze József Attilát és Pákozdyt, amelyben az utóbbi elismeri társa költő és szellemi felsőbbségét. 1934. évi tavaszi együttlétüknek érdekes dokumentuma az 1934. június 20-án kelt, Beke Manó matematikusnak címzett, el nem küldött levél, amelyben a két barát egy vitatott matematikai kérdésben szeretné döntőbírónak felkérni az ismert szakembert.”* ([36, 26–27. o.]).

Az olvasó most értheti meg, hogy mi szükség volt a hosszú, személyes bevezetőre: így válik azt hiszem azonnal világossá, hogy miért döbbentem meg a fenti sorokat olvasva (valószínűleg sokkal jobban, mint Tverdota könyvének bármely olvasója tette ennél a bekezdésnél).

De vajon mi lehet ez a kérdés? Az előbbiek alapján az is érthető, hogy miért kezdett azonnal nagyon furdalni a kíváncsiság, sajnos azonban Tverdota könyve magát a kérdést nem közli. Szerencsére sikerült utánajárnom: a 11.1. ábrán József Attila és Pákozdy Ferenc ominózus levelének facsimile oldala látható.

Noha a levél jól olvasható, a biztonság kedvéért közlöm a szöveghű átiratát is:

*Hódmezővásárhely, 1934. június 20.*

*Méltóságos Uram!*

*Egy társaságban a következő kérdés merült föl:*

*Lehetséges-e, hogy a „cikloist” író pont pályája egybeessék a talppontot a tetőponttal összekötő dislokációs egyenessel, ha a gördülési pályát csak a saját – pozitiv vagy negativ – irányába mozgatjuk el? (Félreértés elkerülése végett megjegyezzük, hogy „gördülési pálya” alatt Méltóságod „Bevezetés a differenciál- és integrálszámításba” c. könyvének (Népszerű Főiskola Könyvtára, II. kiad.) 38. oldalán szereplő ábrán x tengelyként jellemzett egyenest értjük.)*

*E lehetőség állitója szerint erre van legalább egy eset, mégpedig akkor, ha a pálya elmozditása a gördüléssel ellenkező irányba történik*

$$c = \frac{2\pi \pm \sqrt{4\pi^2 - 16}}{2} \ldots / \textit{ sebességgel;}$$

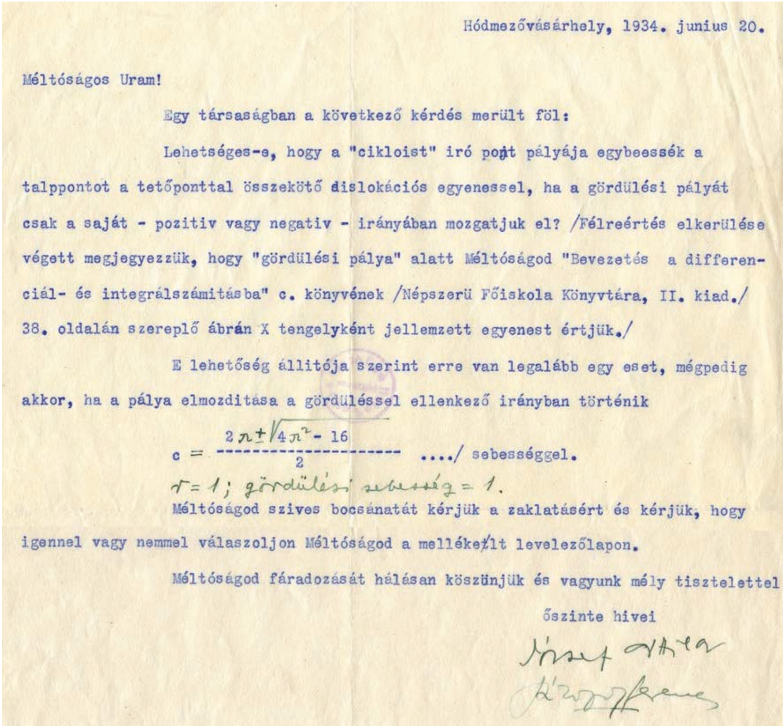
$r = 1$*; gördülési sebesség* $= 1$.

*Méltóságod szives bocsánatát kérjük a zaklatásért és kérjük, hogy igennel vagy nemmel válaszoljon Méltóságod a mellékelt levelezőlapon.*

*Méltóságod fáradozását hálásan köszönjük és vagyunk mély tisztelettel*

*őszinte hivei*
*József Attila*
*Pákozdy Ferenc*

Megtudta József és Pákozdy a választ erre a kérdésre? Valószínűsíthetően nem, ugyanis az 1976-ban az Akadémiai Kiadónál megjelent *József Attila válogatott levelezése* című gyűjtemény ([6]) végjegyzetei között ezt írja a levélről: *„A közlés alapjául szolgáló levél nem látszik misszilisnek* [tényleges (értsd: nem költői) levélnek – FT]. *Nem is fogalmazványjellegű. Írói, valószínűleg, eredeti tervüktől elállottak és nem küldték el a címzettnek.”* ([6, 466. o.]). A 2006-os, teljesség igényével készült *József Attila* levelezése hasonlóan nyilatkozik (*„géppel írott, el nem küldött levél”*, [12, 407. o.]); érdekesebb az ezt követő megjegyzése a végjegyzetnek: *„a [. . . ] levelet valószínűleg azért nem küldték el, mert belátták dilettáns voltát”* ([12, 686. o.]). Sajnos a kötet szerkesztői nem közölték, hogy ez utóbbi megállapításukat mire alapozzák. (Hozzá kell tenni, hogy bár a kérdésre adott válasz tényleg nem különösebben érdekes, de azért dilettánsnak – én legalábbis – nem nevezném.) Péter László *József Attila közöttünk* című 1980-as könyve szintén megerősíti, hogy a levelet nem küldték el ([25, 86. o.]).



Hódmezővásárhely, 1934. junius 20.

Méltóságos Uram!

Egy társaságban a következő kérdés merült föl:

Lehetséges-e, hogy a "cikloist" iró pont pályája egybeessék a talppontot a tetőponttal összekötő dislokációs egyenessel, ha a gördülési pályát csak a saját - pozitiv vagy negativ - irányában mozgatjuk el? /Félreértés elkerülése végett megjegyezzük, hogy "gördülési pálya" alatt Méltóságod "Bevezetés a differenciál- és integrálszámitásba" c. könyvének /Népszerü Főiskola Könyvtára, II. kiad./ 38. oldalán szereplő ábrán X tengelyként jellemzett egyenest értjük./

E lehetőség állitója szerint erre van legalább egy eset, mégpedig akkor, ha a pálya elmozditása a gördüléssel ellenkező irányban történik

$$c = \frac{2\pi \pm \sqrt{4\pi^2 - 16}}{2}$$ ..../ sebességgel.

$r = 1$; gördülési sebesség $= 1$.

Méltóságod szives bocsánatát kérjük a zaklatásért és kérjük, hogy igennel vagy nemmel válaszoljon Méltóságod a mellékelt levelezőlapon.

Méltóságod fáradozását hálásan köszönjük és vagyunk mély tisztelettel

őszinte hivei

József Attila

Pákozdy Ferenc

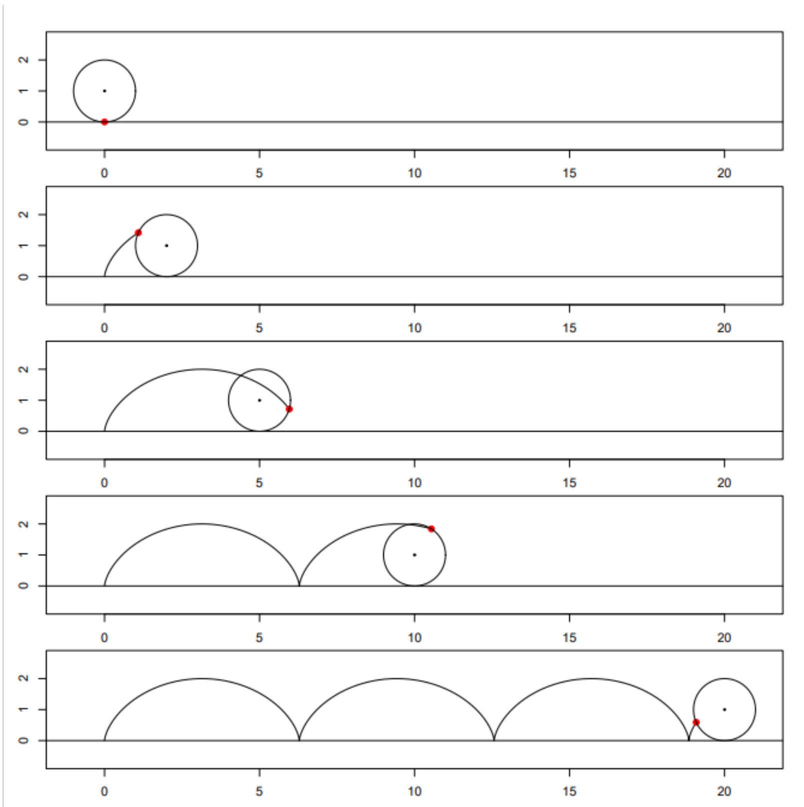
11.1. ábra. József Attila és Pákozdy Ferenc levele Beke Manónak.
(Forrás: Petőfi Irodalmi Múzeum Kézirattár, JA. 708.)

Mi sem áll távolabb jelen sorok szerzőjétől, mint hogy Beke Manónak képzelje magát, de – noha végeredményben a kérdésfelvetés nem túl izgalmas válaszra vezet, és Józsefék jó eséllyel félreértettek valamit – nem minden tanulság nélküli megválaszolni a feltett kérdést.

## 3. Eredmény és megbeszélés

### 3.1. A ciklois fogalma és alkalmazásai

Elöljáróban egy kis magyarázat azok számára, akik nem ismerik a ciklois fogalmát. Képzeljünk el egy vízszintes, egyenes úton gördülő kocsikereket! Képzeletben jelöljük meg az épp földdel érintkező pontját, és nézzük meg, hogy milyen pályát ír le, miközben a kerék tovagördül az úton. Azt látjuk, hogy szép szabályos ívet követ: a földhöz közeledve látszólag lelassul, szinte függőlegesen megy le-föl, a másik oldalon pedig gyorsan suhan vízszintesen. Ezt a görbét hívjuk cikloisnak. A 11.2. ábra mutatja a cikloist, szemléltetve annak kialakulását is (a https://www.github.com/tamas-ferenci/JozsefAttilaEgyMatematikaiKerdese oldalon mindez animáció formájában is megtekinthető).

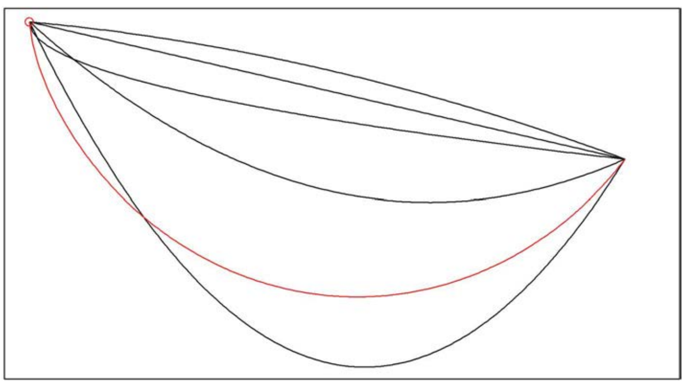



11.2. ábra. A ciklois görbe és létrejötte.

A ciklois több matematikai probléma kapcsán előjön, ezek közül a két leghíresebbet említem meg itt. Noha a megoldásuk mélyebb eszközöket igényel, maguk a problémák – és az eredmények – teljesen hétköznapi nyelven elmondhatóak (és elég érdekesek is!). A megértés szempontjából nem lényeges, és helyenként matematikailag mélyebb részeket lábjegyzetben közlöm.

### 3.1.1. A brachisztochron probléma

Az egyik ilyen nevezetes kérdés a brachisztochron probléma: egy függőleges falon kijelölünk két, nem egymás felett lévő pontot. Kiterjedt barkácstudásunk lehetővé teszi, hogy tetszőleges alakú rámpát ácsoljunk a két pont között, amelyen aztán a magasabban fekvő pontból legurítunk egy golyót az alacsonyabban fekvő pontba. Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy a gravitáció mindenhol azonos nagyságú, valamint, hogy a golyó súrlódás nélkül csúszik a rámpán. A kérdés: milyen alakú rámpán fog a legrövidebb idő alatt legurulni a feljebb fekvő pontból a lejjebb fekvő pontba a golyó? Érezhető, hogy az nem lesz jó, ha eleinte szinte vízszintes a rámpa és aztán esik gyorsan, hiszen így nagyon sok idő lesz, míg a gyors esésig „elcsorog” a golyó. Akkor talán pont a fordítottja lesz a jó, eleinte essen meredeken, aztán legyen hosszan vízszintes? Így először nagyon begyorsul, viszont cserében még sokat meg kell tenni egy szinte vízszintes szakaszon. Vagy inkább kössük őket egyszerűen össze egyenesen? Akár az az eretnek gondolat is az eszünkbe juthat, hogy engedjük a golyót a lejjebb fekvő pontnál is mélyebbre, hogy jó nagy lendületet vegyen, és a végén kicsit fordítsuk vissza.



11.3. ábra. A brachisztochron probléma: a fenti pontból azonos időpontban elindított golyók legurulása különböző alakú pályákon. Az ábra a ciklois mentén (piros görbe) leguruló golyó beérkezése előtti pillanatot ábrázolja; jól látható, hogy a többi golyó többé vagy kevésbé, de mind le van maradva.

A 11.3. ábra szemlélteti[1], hogy mi lesz a megoldás: a ciklois! Egy ciklois alakú rámpát kell ácsolnunk, és azzal összekötnünk a két pontot, ezen fog a legrövidebb idő alatt eljutni a golyó az egyik pontból a másikba. (Az alábbi és a később következő animációk is megtekinthetők a https://www.github.com/tamas-ferenci/JozsefAttilaEgyMatematikaiKerdese oldalon.)

A bizonyítás messze meghaladja ezen írás kereteit[2], de a történetére egy gondolat erejéig érdemes kitérni. A problémát Johann Bernoulli (a Bernoulli család legelső tudósgenerációjának Johannja) tűzte ki 1696-ban egy folyóiratcikkben, céliirányosan a „világ briliáns matematikusait" megszólítva. Valóban elég erős me-

[1] Azok számára, akik szeretnék saját kezűleg megvizsgálni ezt, a következő a fizikai levezetés. Vegyük fel a koordinátarendszerünk origóját a kezdőpontban, az $x$ tengely mutasson vízszintesen jobbra, az $y$ pedig függőlegesen lefelé. Mivel a golyó energiája kezdetben nulla, és a gravitáción kívül más nem hat rá, így $y$ „magasságban" (mélységben) $mgy$ helyzeti energiát nyer; a súrlódás hiánya miatt ez teljesen egészében az $\frac{1}{2}mv^2$ mozgási energiájává alakul. Azaz a sebessége, midőn a függőleges koordinátája $y$, épp $v = \sqrt{2gy}$. Másrészről, egy piciny $\mathrm{d}s$ szakasz megtételéhez szükséges idő, ha épp $v(s)$ a golyó sebessége (ahol $s$ az indulási ponttól a pályán mérve megtett út) természetesen $\frac{\mathrm{d}s}{v(s)}$, így az egész út megtételéhez szükséges idő $\int_A^B \frac{\mathrm{d}s}{v(s)}\,\mathrm{d}s$. Hogy áttérjünk $s$-ről $x$-re, kellene tudni, hogy $x$ koordinátánál mennyi a pályán mért elmozdulás, ha egy kicsiny $\mathrm{d}x$ távolsággal odébb megyünk. Szerencsére ez analízisből ismert, hiszen lényegében egy ívhosszról van szó: $\mathrm{d}s = \sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$, ahol $y(x)$ a rámpa alakja, mint függvény. Ezt behelyettesítve kapjuk, hogy a szükséges idő $\int_0^b \frac{1}{\sqrt{2gy(x)}}\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$, ha $b$ a $B$ pont vízszintes távolsága $A$-tól. Kihasználtuk, hogy a golyó vízszintesen csak szigorúan $A$-ból $B$ fele tud haladni (egy csak alátámasztást nyújtó rámpával nem tudjuk visszafordítani vízszintesen), így a teljes út integrálása megfelel az $x$ szerint 0-tól $b$-ig történő integrálásnak. (Ha a görbénk paraméteresen adott, akkor a $\int_{t_a}^{t_b} \frac{1}{\sqrt{2gy(t)}}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$ alak használható, ahol $t_a$ és $t_b$ azok az értékek, amik között a paraméternek futnia kell, hogy megkapjuk a görbét $A$-ból $B$-be.) A feladat az, hogy megtaláljuk azt az $y(x)$ függvényt, ami ezt a kifejezést minimalizálja. Itt arról van tehát szó, hogy minden függvényhez hozzárendelünk egy számot, ezt szép néven funkcionálnak szokták hívni, és ezek körében minimalizálunk – keressük azt a függvényt, amihez rendelt szám a minimális. A matematika azon területét, ami ilyen szélsőérték-keresési feladatokkal foglalkozik, szokás variációszámításnak nevezni; a brachisztochron probléma a legelső történeti példák egyike variációszámításos feladatra ([10, 13, 19, 33, 39]).

[2] Mindazonáltal néhány egyszerű alakú függvényre, például egyenesre, különböző kitevőjű hatványokra, különböző gyökökre, vagy akár paraméteresen adott görbékre, például körre, ellipszisre stb. érdekes lehet kiszámolni – ha lehet, analitikusan, ha nem, numerikusan – az integrált, és megnézni mit kapunk!

zőny gyűlt össze: egy évvel később Newton, Leibniz és l'Hospital megoldásait közölte, együtt a sajátjával és a bátyjáéval, Jakob Bernoulliével (aki testvéréhez hasonlóan foglalkozott analízissel, de mellette ő a valószínűségszámítás egyik első nagy alakja). Ők ketten aztán úgy össze is vitatkoztak a megoldásaikon, hogy az éveken át tartó konfliktushoz vezetett ([29]). (A Bernoulli famíliában nem teljesen ismeretlen jelenség a családtagok közti irigykedés egymás tudományos eredményeire: az itt is említett Johann kidobta a családi házból a saját fiát, Daniel Bernoullit – az áramlástan későbbi megalapítóját – annyira felhúzta magát azon, hogy megosztva kapták meg a Francia Tudományos Akadémia díját, amit érzése szerint egyedül érdemelt volna meg. . . )

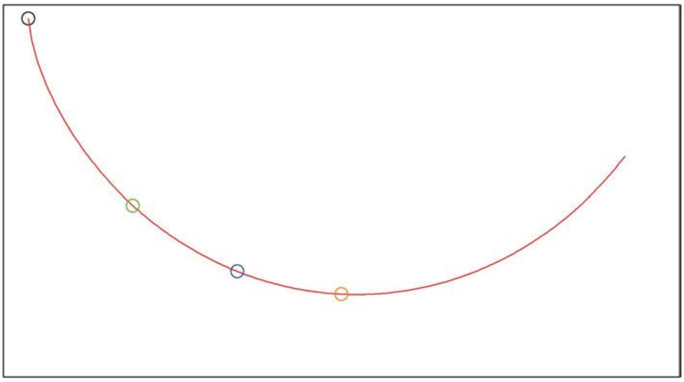
### 3.1.2. A tautochron probléma

A másik problémánál is egy függőleges falunk van, rajta két, nem egymás fölött elhelyezkedő ponttal, közöttük ácsolandó rámpával és azon leguruló golyóval, csak itt a kérdés a következő: ácsolható-e olyan rámpa, hogy a golyó mindig ugyanannyi idő alatt ér le rajta az alsó ponthoz, *függetlenül attól*, hogy honnan indítjuk a rámpa mentén? Tehát akár a tetejéről indítjuk a golyót, akár a közepéről, akár az aljához nagyon közel, mindig ugyanannyi időt vesz igénybe, hogy az alsó ponthoz érjen. (Úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha elindítunk tetszőleges számú golyót a rámpa tetszőleges pontjairól, akkor azok pontosan egy pillanatban érjék utol egymást, mégpedig akkor, amikor mind épp az alsó ponthoz ér.) Megvalósítható ez?

Első ránézésre meglepő, hogy ilyen alakú rámpa egyáltalán létezhet. Sokan ugyanis arra gondolnak, hogy amit feljebbről indítunk, annak nagyobb utat kell megtennie, hogyan érhetné akkor utol egyáltalán a lejjebbről indulót?! Igen ám, de választhatunk olyan alakot, hogy feljebb egyúttal meredekebb is legyen a rámpa, így az onnan induló golyók nagyobb sebességet érjenek el! Tehát a kérdés lényegében az, hogy vajon létezik-e olyan alak, ahol a feljebb lévő nagyobb meredekség *pontosan* akkora előnyt ad a golyónak, mint amekkora hátrányt a nagyobb út.

A válasz a kérdésre pozitív, és a megfejtés: a ciklois.

Ciklois alakú rámpán ez megvalósul: ha ácsolunk egy kilométer hosszú cikloist és elindítunk egy golyót a végéből, akkor bármilyen nehéz is elhinni, de az pontosan akkor fog az aljára érni, mint az a golyó, amelyet egy arasznyira indítottunk el az aljától. (Természetesen a súrlódástól ennél a feladatnál is eltekintünk.) A 11.4. ábra ezt szemlélteti, illetve a már említett oldalon is megtalálható az animáció.



11.4. ábra. A tautochron probléma: a ciklois alakú pálya különböző pontjairól elindított golyók legurulásának néhány „pillanatfelvétele". Jól látszik, hogy mindegy honnan indult a golyó, ugyanannyi idő kell, hogy leérjen, ezért pontosan az alsó pontban találkoznak, indítási helytől függetlenül.

Említsük meg egy érdekes alkalmazását ennek az eredménynek. Aki középiskolában végigszámolta fizikaórán az inga lengését, talán emlékszik rá, hogy a levezetés úgy indul, hogy „tegyük fel, hogy az ingát csak kicsit térítjük ki". Néhányan talán arra is emlékeznek, hogy ez azért fontos, hogy a számolásban megjelenő szögfüggvényekre a kis szögeknél működő közelítést[3] használni tudjuk. De mi történik, ha a kitérítés nem kicsi? A dolog persze ekkor is végigszámolható, az eredmény sokkal bonyolultabb alakú lesz, de most nekünk nem is ez fontos, hanem az, hogy amit kapunk, az nem csak számértékében fog eltérni a közelítőtől, hanem abban is, hogy a lengés periódusideje – szemben a közelítő számítással – függeni fog a kitérítés mértékétől! A dolog azért érdekes, mert van egy eszköz, ami több mint 200 éven keresztül alapvető fontosságú volt a társadalom és gazdaság működésében, és aminek a pontossága kritikusan függ egy inga periódusidejétől: az ingaóra. Az előzőekből látszik az ingaóra egyik problémája: a periódusidő a valóságban függeni fog attól, hogy mennyire tér ki az ingája, csakhogy ez óhatatlanul változik időben, ami így elkerülhetetlenül hibához vezet.

[3] Az ingánál konkrétan azt, hogy $\sin\alpha \approx \alpha$.

Christiaan Huygens, aki magát az ingaórát is megvalósította 1656-ban, pár évtizeddel később rájött a megoldásra: olyan ingát kell szerkeszteni, amelynek a súlya egy ciklois alakú pálya mentén leng! Hiszen a tautochron probléma megoldása épp azt mondja, hogy ez esetben a lengés periódusideje nem fog függeni a kitérítéstől. Kérdés persze, hogy hogyan lehet a gyakorlatban elérni, hogy a súly ne egy kör alakú pályán, hanem cikloison lengjen, de Huygens ezt is megoldotta: az inga felfüggesztése köré mindkét oldalra egy – fejjel lefelé fordított – ciklois alakú határolót kell rakni ([11]). Miközben az inga leng, a tartó fonala felütközik ezekre a pofákra, és ez az inga súlyát egy ciklois alakú pályára kényszeríti[4]. Ez az ún. cikloidális inga. A dolog ugyan elméletben valóban megjavította az ingaórát, de a gyakorlatban nem vált be: egyrészt az ingaóra pontatlanságának összes egyéb forrása, pláne a 17. században, lényegesen nagyobb volt, mint a kitéréstől függő periódusidő jelentette hiba (különösen, ha biztosítjuk, hogy a kitérés ne lehessen túl nagy), másrészt a fonál pofára való felütközése mechanikai veszteségekkel jár, úgyhogy a megoldás igazából maga is teremt egy új hibaforrást.

### 3.2. A ciklois egyenlete

A tárgyalás pontosításához először is vezessünk be egy koordinátarendszert, ami a 2. ábrára ránézve teljesen kézenfekvő lesz: a nyomon követett pont kezdeti pozíciója legyen az origó, a függőleges tengely mutasson függőlegesen, pozitív iránnyal felfelé, a vízszintes pedig vízszintesen, pozitív iránnyal jobbra.

[4] Fontos, hogy ez nem valamiféle triviálisan látható dolog, be kell bizonyítani, és az csak véletlen, hogy a ciklois alakú pályára kényszerítéshez épp ciklois alakú pofákra volt szükség. Azt, hogy adott alakú pofánál a rá felütköző fonál végpontja milyen görbét ír le, a pofa evolvensének nevezzük, megfordítva pedig azt mondjuk, hogy a pofa alakja az evolútája annak a görbének, amit a rá felütköző fonal végpontja leír. (Természetesen a matematikai definíciónál a gravitációra meg a felütközésre nincs szükség: azt mondjuk, hogy a fonalat mindig megfeszítve tartjuk.) Evolvensből végtelen sok van, attól függően, hogy milyen hosszú a fonál, evolútából viszont csak egy. A kérdés tehát az, hogy melyik görbének lesz az evolvense a ciklois, avagy fordítva megfogalmazva, mi a ciklois evolútája – és a válasz az, hogy a ciklois! De ismét hangsúlyozni kell, hogy ez csak véletlen, például a kör evolútája egy pont (gondoljuk végig!), az $y = x^2$ parabola evolútája az $y = 3\,(x/4)^{2/3} + 1/2$ ún. Neil-parabola. Még csak az sem igaz, hogy a ciklois az egyetlen görbe, amely saját maga evolútája, például a (logaritmikus) spirálnak szintén önmaga az evolútája.

Azért, hogy a kérdést ne bonyolítsuk feleslegesen, a lényegen nem változtató paramétereket válasszuk egységnyire[5]. Azaz: a kerék sugara legyen 1, a gördülési sebessége pedig olyan, hogy egységnyi idő alatt $\frac{1}{2\pi}$ fordulatot tegyen meg a kerék. Ez utóbbi így kimondva egyáltalán nem tűnik egységnyinek, de valójában az, hiszen azt jelenti, hogy $t$ idő alatt $\frac{t}{2\pi}$ fordulatot tesz meg a kerék, azaz a szögelfordulása épp $t$ (mivel 1 fordulat az $2\pi$ szögelfordulás), ami egyúttal azt is megadja, hogy a középpont épp $t$ utat haladt jobbra, hiszen az egységnyi kerület miatt $t$ szögelforduláshoz $t$ ívhosszúság tartozik, ami „hozzáért" az úthoz, tehát amennyivel odébb ment a kerék[6]. A szögelfordulást úgy értjük, hogy a kerék középpontját a nyomon követett ponttal összekötő egyenes mennyit fordult el a függőlegeshez képest, a pozitív szög az óramutató járása szerinti elfordulást – jobbra gördülést – jelenti. (A szöget radiánban mérjük.)

A ciklois egyenletének az előállítása paraméteres formában egyszerű. Nézzük először a függőleges mozgást! Itt nem számít, hogy a kerék jobbra is gördül, csak annyi a fontos, hogy $t$ szöget fordult el, ezért a pont $\cos t$-vel van a középpont alatt (ez persze lehet negatív is – ekkor fölötte van). Mivel a középpont 1-gyel van a talaj fölött, így a pont függőleges koordinátája $y = 1 - \cos t$. Vízszintes irányban a középpont $t$-t haladt jobbra, de a pont $\sin t$-val van tőle balra (természetesen ez is lehet negatív), így a vízszintes koordinátája $t - \sin t$.

A ciklois paraméteres egyenletrendszere tehát:

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

(A matematikai leírás szempontjából nyugodtan el is felejthetjük, hogy a $t$-nek mi idő interpretációt adtunk, a lényeg, hogy a $t$ egy nemnegatív valós szám.)

Elő lehet állítani ebből explicit alakot is? Érdekes módon az a válasz, hogy csak az egyik irányban lesz zárt alakú megoldásunk.

[5] Igen, tudom, hogy a fizikus olvasók most a szívükhöz kapnak, hiszen így dimenzionálisan elromlanak az egyenletek. Itt most legyünk picit matematikusak.

[6] Ami egységnyi itt, azt a fizikusok úgy hívnák, hogy a forgás körfrekvenciája: $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$, ahol $T$ a periódusidő, $f = 1/T$ a frekvencia.

Ha ugyanis kifejezzük a $t$-t $y$-ból, akkor azt kapjuk, hogy $t = \arccos(1-y)$, így

$$x = \arccos(1-y) - \sin\arccos(1-y),$$

ami egyszerűsítés után

$$x = \arccos(1-y) - \sqrt{1-(1-y)^2} = \arccos(1-y) - \sqrt{y(2-y)},$$

mivel[7] $\sin\arccos\beta = \sqrt{1-\beta^2}$. Természetesen így – szemben a paraméteres alakkal – csak a ciklois egy „ciklusát”, és annak is csak az első felét tudjuk megkapni (logikusan, hiszen utána egy adott $y$-hoz már több $x$ is tartozhat).

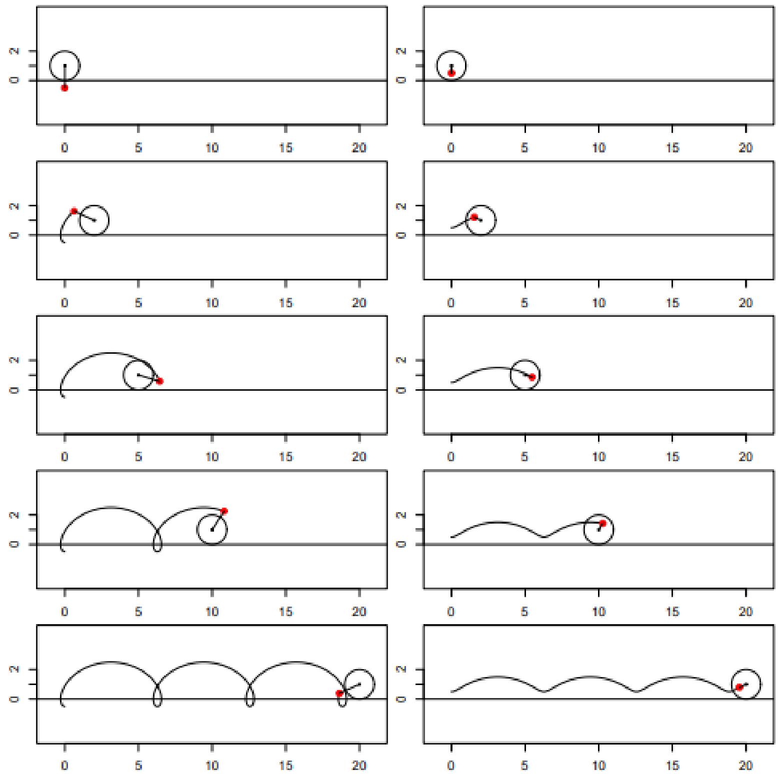
Ha azonban fordítva akarjuk kifejezni a cikloist, tehát – természetesebb módon – $y$-t az $x$-ből, akkor hamar elakadunk: az $x = t - \sin t$ egyenletet kellene megoldanunk $t$-re, csakhogy ez egy transzcendens egyenlet, aminek nincs zárt alakú megoldása! A cikloist tehát általában nem lehet explicit formában felírni, még egy ciklusra, sőt, még egy fél ciklusra sem.

### 3.3. József Attila és Pákozdy Ferenc kérdésének megválaszolása

Térjünk most rá Józsefék kérdésére! Először is állapítsuk meg, hogy a kérdés nem úgy értendő, hogy akkor mi történik, ha a keréknek *az úthoz viszonyított* sebességét változtatjuk. Tudniillik, ha a kereket magát úgy mozgatjuk, hogy egy körbefordulásnyi idő alatt nem egy kerületnyi ($2\pi$) utat halad a középpontja, akkor a kerék természetesen kénytelen lesz csúszni. (Pontosabb is lett volna, ha a definícióba belemondjuk, hogy „csúszás nélkül” gördül.) Természetesen az is érdekes matematikai probléma, hogy a csúszásos esetben mi történik, de a kérdés vélhetően nem erre irányult, hiszen úgy fogalmaz, hogy *„a gördülési pályát [...] mozgatjuk”*, tehát a kerék kényszerített mozgatásáról szó sincs. Ettől függetlenül egy gondolat erejéig térjünk ki erre is: ha a kerék csúszik, akkor a leírt pálya vagy hurkolt, vagy nyújtott ciklois lesz ([14]). Hogy mik ezek? Rokonai a „szokásos” cikloisnak, olyannyira, hogy megkaphatjuk őket úgy is, hogy csúszásmentesen gördül a kerék, csak épp ekkor nem a kerék kerületén fekvő

[7] Tudjuk, hogy $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Legyen $\beta = \cos\alpha$, és így $\alpha = \arccos\beta$, ezt az előző egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $(\sin\arccos\beta)^2 + \beta^2 = 1$, ahonnan már adódik a felhasznált összefüggés.

pontot kell néznünk, hanem egy „küllőjén” találhatót, tehát belső pontot (nyújtott ciklois), vagy a küllő képzeletbeli meghosszabbításában egy külső pontot (hurkolt ciklois). A 11.5. ábra mutatja az ilyen görbéket. Ha tehát a kerék csúszását is megengedjük, akkor ilyet fogunk kapni (ha még azt is megengedjük, hogy az ellenkező irányba forogjon mint amerre csúszik, akkor esetleg ezeket tükrözve a vízszintes tengelyre); összefoglaló nevén ezeket a görbéket hívjuk trochoidnak. A dolog még tovább is általánosítható, ha nem egyenes mentén gördítjük a kört, vagy nem kört gördítünk, az így kapott görbéket rulettáknak szokás nevezni ([26]), de ez már végképp nem tartozik a mostani tárgyunkhoz.



11.5. ábra. A hurkolt (balra) és a nyújtott (jobbra) ciklois görbék és létrejöttük. Ezeket, együtt a „szokásos” (szép nevén: csúcsos) cikloissal, szokás trochoid görbéknek nevezni. Mozgásban itt lehet látni a hurkolt és a nyújtott cikloist.

De mi a helyzet József Attiláék kérdésével? A megfogalmazás egyértelmű, a pályát magát mozgatjuk, a kerék szép nyugodtan gördül (csúszás nélkül), azt nem befolyásoljuk. Világos, hogy itt nincs a fentihez hasonló csúszási probléma: ha a pályát mozgatjuk (*magunkhoz képest*), akkor minden sebességnél csúszás nélkül tud haladni a kerék, hiszen annak gördülését a *pályához képest* értjük. Így már teljesen értelmes a kérdésfelvetés, a pályát húzzuk, azon pedig „szokásosan" gördül a kerék. Vegyük észre, hogy az így megfogalmazott feladat azonos azzal, mintha nem a pályát mozgatnánk, hanem saját magunkat, a megfigyelőt, tehát egy teljesen hagyományos cikloisról beszélnénk, csak épp úgy, hogy közben a megfigyelő is odébb megy.

Nagyobb problémát jelent a kérdés megértésénél, hogy mégis pontosan mi kell, hogy egyenes legyen. A zavart elsősorban a „talppont", „tetőpont" és – különösen – a „dislokációs egyenes" szavak használata okozza, melyeket a levél sehol nem definiál. Első ránézésre az ember azt gondolhatná, hogy ezeket minden bizonnyal Beke Manó használta a levél által is hivatkozott könyvében ([3]). Bár ez nagyon kézenfekvő magyarázat lenne, sajnos nem igaz: a 11.6. ábra mutatja Beke könyvének cikloisról szóló részét, pontosan abból az 1920-as második kiadásából, amit a levél alapján József Attiláék is olvastak. Jól látható, hogy a nem definiált kifejezések egyike sem szerepel benne.

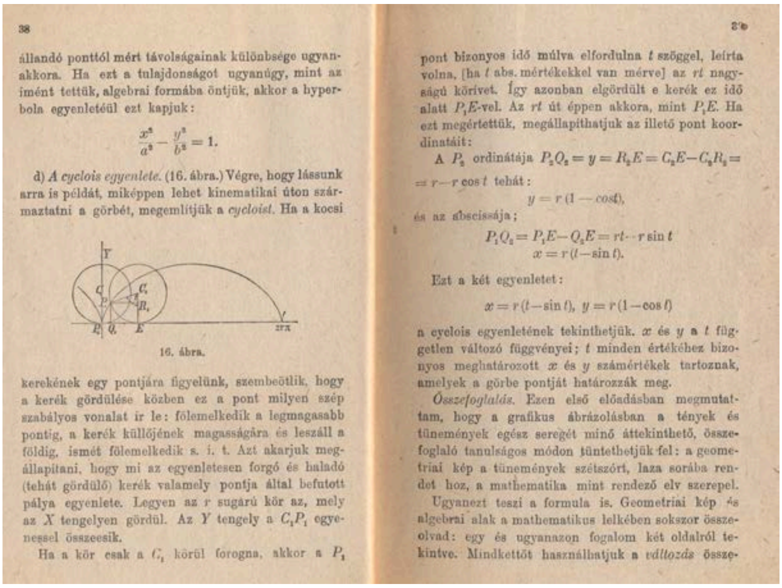
Magunkra vagyunk tehát utalva, hogy kiválasszuk a megfelelő értelmezést. A legvalószínűbb talán a következő: a talppont a kerék talajjal érintkező pontja a gördülés megkezdésekor (tehát a ciklois kiindulópontja), a tetőpont a ciklois legmagasabb pontja, tehát a nyomon követett pont helye egy fél kerékfordulat után, a „dislokációs egyenes" pedig egyszerűen a kettőt összekötő egyenes.

Ha így definiáljuk, akkor a probléma nagyon egyszerűen megoldható, csak egy dologra kell odafigyelnünk.

Ha pálya a húzás révén $t$ időben $s(t)$ távolsággal van eltolódva (a pozitív szám jelentse a koordinátarendszer előjelével egyezően a jobbra mozgatást), akkor a görbe paraméteres egyenletrendszere nyilván:

$$\begin{cases} x = t - \sin t + s(t) \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$$

Ahhoz, hogy ez épp egy egyenes legyen, az $y = x$ egyenlőségnek kell megvalósulnia. (Természetesen nyugodtan mondhattunk volna $y = Ax + B$ egyenlőséget



38

állandó ponttól mért távolságainak különbsége ugyanakkora. Ha ezt a tulajdonságot ugyanúgy, mint az imént tettük, algebrai formába öntjük, akkor a hyperbola egyenletéül ezt kapjuk:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

d) *A cyclois egyenlete.* (16. ábra.) Végre, hogy lássunk arra is példát, miképpen lehet kinematikai úton származtatni a görbét, megemlítjük a *cycloist.* Ha a kocsi

16. ábra.

kerekének egy pontjára figyelünk, szembeötlik, hogy a kerék gördülése közben ez a pont milyen szép szabályos vonalat ír le: fölemelkedik a legmagasabb pontig, a kerék küllőjének magasságára és leszáll a földig, ismét fölemelkedik s. i. t. Azt akarjuk megállapitani, hogy mi az egyenletesen forgó és haladó (tehát gördülő) kerék valamely pontja által befutott pálya egyenlete. Legyen az $r$ sugárú kör az, mely az $X$ tengelyen gördül. Az $Y$ tengely a $C_1P_1$ egyenessel összeesik.

Ha a kör csak a $C_1$ körül forogna, akkor a $P_1$

39

pont bizonyos idő múlva elfordulna $t$ szöggel, leírta volna, [ha $t$ abs. mértékekkel van mérve] az $rt$ nagyságú körivet. Így azonban elgördült e kerék ez idő alatt $P_1E$-vel. Az $rt$ út éppen akkora, mint $P_1E$. Ha ezt megértettük, megállapithatjuk az illető pont koordinatáit:

A $P_2$ ordinátája $P_2Q_2 = y = R_2E = C_2E - C_2R_2 =$ $= r - r\cos t$ tehát:

$$y = r(1 - \cos t),$$

és az abscissája;

$$P_1Q_2 = P_1E - Q_2E = rt - r\sin t$$
$$x = r(t - \sin t).$$

Ezt a két egyenletet:

$$x = r(t - \sin t),\ y = r(1 - \cos t)$$

a cyclois egyenletének tekinthetjük. $x$ és $y$ a $t$ független változó függvényei; $t$ minden értékéhez bizonyos meghatározott $x$ és $y$ számértékek tartoznak, amelyek a görbe pontját határozzák meg.

*Összefoglalás.* Ezen első előadásban megmutattam, hogy a grafikus ábrázolásban a tények és tünemények egész seregét minő áttekinthető, összefoglaló tanulságos módon tüntethetjük fel: a geometriai kép a tünemények szétszórt, laza sorába rendet hoz, a mathematika mint rendező elv szerepel.

Ugyanezt teszi a formula is. Geometriai kép és algebrai alak a mathematikus lelkében sokszor összeolvad: egy és ugyanazon fogalom két oldalról tekintve. Mindkettőt használhatjuk a *változás* össze-

11.6. ábra. Facsimile oldalak Beke Manó Bevezetés a differenciál- és integrálszámításba könyvének azon kiadásából, amelyre József Attila és Pákozdy Ferenc levele hivatkozik.

is, de részint érezhető, hogy ez – pusztán lineáris átskálázás révén – érdemi újdonságot nem fog hozni, csak a jelöléseket bonyolítja, részint a kérdés pozitív megválaszolásához nekünk elég egy egyenest mutatnunk.) A megoldandó egyenlet tehát:

$$1 - \cos t = t - \sin t + s(t),$$

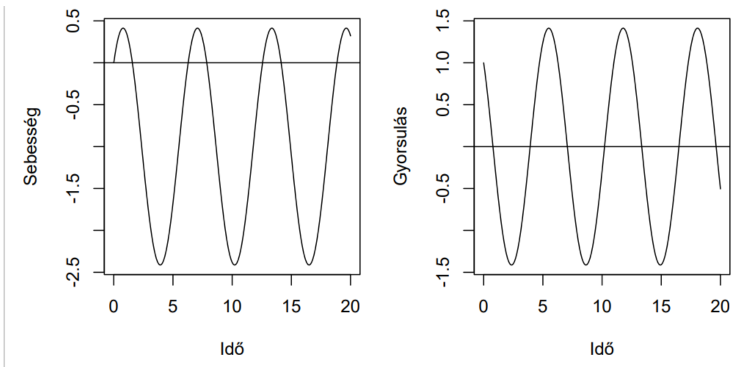
amiből

$$s(t) = 1 - \cos t - t + \sin t.$$

Ez egyáltalán nem volt nehéz, sőt, rögtön látszik, hogy minden létező paraméteres görbére egyszerűen megoldható ugyanilyen módon, a kérdés inkább csak az lehet, hogy ez a mozgás fizikailag realizálható-e. Ha például az $s(t)$ függvénynek szakadása van, akkor az nyilván nem lehet egy talaj tényleges mozgása, hiszen az nem tud pillanatszerűen „odébb ugrani”. Itt belefutunk abba, hogy mi a pontos definíciója annak, hogy „fizikailag realizálható”, mert amellett is lehet érvelni, hogy mondjuk a sebesség maga sem tud pillanatszerűen megváltozni.

Szerencsénkre mind a szinusz-, mind a koszinuszfüggvény nemcsak, hogy folytonos, de mivel a deriváltjaik is szinuszok és koszinuszok lesznek, így elmondható, hogy *minden* deriváltjuk is folytonos[8]. Mivel $s(t)$ időbeli deriváltja lesz a talaj mozgatásának szükséges sebessége, annak deriváltja a szükséges gyorsulás, és így tovább, ha ez mind folytonos, akkor nyugodtak lehetünk afelől, hogy ez a mozgatása a talajnak – avagy, fordítva nézve, a megfigyelőnek – fizikailag realizálható.

A 11.7. ábra mutatja az ahhoz szükséges talajsebességet és -gyorsulást, hogy a pont pályája egyenes legyen. A sebesség jórészt negatív, de gondoljuk végig, hogy ez teljesen logikus: mivel a kerék jobbra (pozitív irányba) gördül, így a talajt nyilván balra (negatív irányba) kell húznunk, hogy egyáltalán esélye legyen az $y = x$ egyenesen maradnia a pontnak és ne „gördüljön ki” jobbra.




11.7. ábra. A József és Pákozdy levelében felvetett kérdésre választ adó talaj-mozgatás szükséges sebessége és gyorsulása.

Ha ezt kicsit nehéz is elképzelni, a https://www.github.com/tamas-ferenci/JozsefAttilaEgyMatematikaiKerdese oldal utolsó animációja segít, mert megmutatja a dolgot működés közben (azzal, hogy megfigyelőt mozgatja, nem a talajt, de mint már volt róla szó, ez természetesen egyenértékű).

[8] Analízises emberek úgy mondanák: végtelenszer folytonosan differenciálhatóak, avagy $C^\infty$-beliek.

## 4. Konklúzió

*„Vasútnál lakom. Erre sok*
*vonat jön-megy és el-elnézem,*
*hogy' szállnak fényes ablakok*
*a lengedező szösz-sötétben.*
*Igy iramlanak örök éjben*
*kivilágított nappalok*
*s én állok minden fülke-fényben,*
*én könyöklök és hallgatok."*

(József Attila: Eszmélet XII.)

József és Pákozdy kérdésére tehát egyfelől igenlő válasz adható, másrészt viszont a megvalósítás nem az, amit a levélben leírtak. Minden valószínűség szerint félreérthettek valamit, bár arra nem sikerült rájönnöm, hogy mit (az világos, hogy az $x^2 - 2\pi x + 4 = 0$ egyenletet megoldva keresték a választ).

Első ránézésre meglepőnek tűnhet, hogy József Attila levelezésében egyáltalán ilyet találni. Valójában annyira nem meglepő, de ennek megértéséhez tegyünk egy lépést hátra, és nézzük átfogóbban a kérdést – hogyan viszonyult József Attila a matematikához? Ott kezdeném, hogy József a makói gimnáziumban, ahová 1920-tól '23-ig járt, kiváló volt matematikából, az, hogy érettségi jegye „jó" lett, inkább annak köszönhető, hogy milyen körülmények között érettségizett. Testvére, József Jolán, az Attiláról írt életrajzi regényében, *A város peremén* című könyvében még külön ki is tér erre: *„Mennyiségtanban különösen kiváló képességeket árult el, tanára később váltig biztatta, hagyja az irodalmat, foglalkozzon matematikával"* ([17, 123. o.]). József Jolán írása szerint, amikor később „felforgató tevékenysége" miatt – azaz, hogy Ady Endrét szavalt az önképzőkörben – felvenni sem akarták a következő évfolyamra, mennyiségtantanára ezt mondta: *„Ilyen koponya évtizedek alatt sem bukkan föl gimnáziumunkban! Micsoda matematikus lehetne belőle! Barátaim, egy nagy tudós..."* ([17, 132–133. o.]). (Hozzá kell azért tenni, hogy József Jolán műve eléggé ki van színezve, ennél az esetnél ráadásul Jolán jelen sem lehetett.)

József Attila rövid szegedi egyetemi tanulmányai szintén alátámasztják természettudományos érdeklődését: indexének tanúsága szerint ([32]), noha magyar–francia–filozófia szakra járt, felvette Ortvay Rudolf Az anyag korpuszkuláris elmélete és Kiss Árpád Az atomok és molekulák szerkezete című kurzusait.

A tematikák alapján az előbbi kurzuson bizonyosan hallott az akkor legkorszerűbb kvantumfizikai ismeretekről, az utóbbi pedig a radioaktivitást járta körül ([9]). (1924-ben a kvantumfizika „régi kvantumelmélet" érája nagyjából lezárt volt, és erről Ortvay minden bizonnyal átfogóan tudott beszélni, hiszen maga is a legnagyobbaktól tanult, például Arnold Sommerfeldtől[9] Münchenben. A radioaktivitás bemutatása azonban mindenképp nagyon hiányos kellett legyen, hiszen a neutront majd csak 1932-ben fogja felfedezni Chadwick, a nélkül pedig bajos a radioaktivitást bármilyen közelítéssel is elmondani.) József Attila ezeken túlmenően a relativitáselméletről is hallott; Gazda István alaposan feltárta, hogy mi lehetett ezen tudásának a forrása: minden bizonnyal Fényes Samu, ismeretterjesztőnek is kitűnő író, ügyvéd cikkei ([8, 9]). Tverdota György József kozmológiai ismeretei lehetséges forrásainak járt utána egy írásában ([35]), több közlemény, köztük Marx Györgyé pedig általában a modern fizikával való érintkezését mutatta be ([23, 30, 34]).

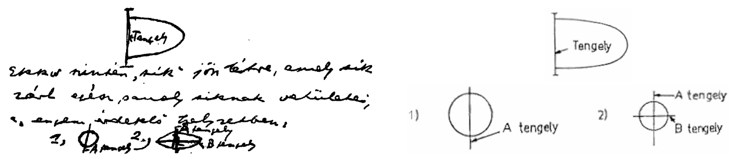
A fentiek fényében talán nem annyira meglepő, hogy a most tárgyalt kérdésen kívül valójában van még egy, jól dokumentált esete József Attila matematikai érdeklődésének! Bécsi tartózkodása alatt, 1926. januárjában levelet írt Galamb Ödönnek, aki a makói gimnáziumban tanára – és egyben pártfogója – volt. Ez a fizikusok számára is érdekes lehet, hiszen egy helyen ezt írja benne: *„Ezek az anyagi okok nálam azt idézik elő, hogy más etikai síkon nyilvánuljon meg az általuk jelen körülmények között elfojtott erő (betörés, gyilkosság, szélhám), hanem életemet befelé irányítják s előáll, de pszihikai kvalitásban az az Einstein állította eset, hogy t.i. egy bizonyos sebességi erő hat egy bizonyos testre s ha az erő akkora, hogy a sebességi határnál (*$300\,000$ *km* $\cdot$ *sec*$^{-1}$*) nagyobb gyorsasággal kéne haladnia a testnek, akkor az erő maga is átalakul anyaggá. Ez az anyag vagyok én és ez az erő vagyok én."* ([6, 90. o.]. (Ebből is érzékelhető, hogy József egyrészt nem értette meg pontosan az einsteini állítást, másrészt, hogy a hozzáállása inkább misztikus, és szabadon használja a felszínes, sőt, pusztán verbális hasonlóságokon alapuló analógiákat.) Fizikusok számára valószínűleg megdöbbentőbb a következő rész, ugyanebből a levélből: *„t.i. a mi univerzumunk a pozitiv és negativ elektrónok rendszere, és a másik jelenlevő univerzum pedig azoké, melyekhez képest a jelen ismert negativok – pozitivok; illetve a jelen ismert elektrónok pozitiv és negativ egyedei által alkotott rendszer – pozitiv rend-*

[9]Sommerfeld a világ legpechesebb fizikusa, akit 1917 és '51 között összesen 84-szer jelöltek Nobel-díjra és egyszer sem kapta meg ([24]). Amellett, hogy a saját jogán is kitűnő fizikus volt, hihetetlen volt a tehetségnevelése: hét tanítványából lett Nobel-díjas!

*szer és ennek megfelelően van negativ rendszer is”*. Az előbbi megjegyzés fényében valószínűleg nem érdemes túlértelmezni ennek a jelentőségét, de azért enyhén szólva is meghökkentő a dolog: Dirac csak 1928-ban, azaz két évvel e levél *után* vetette fel először az antielektronok létét! Amit aztán csak 1932-ben, hat évvel József Attila levele után igazolt egyértelműen Carl David Anderson kísérletesen is. Toró Tibor egész cikket szentelt e kérdés vizsgálatának, melyben alaposan körüljárja a kapcsolódó fizikai ismereteket is ([32]). (Bár hozzá kell tenni, hogy jelen sorok szerzője szerint néhol már kissé a József Attila-i viselkedés inverzébe esve, nem a természettudományhoz kötve felszínes analógiákkal művészetet, hanem a művészethez kötve felszínes analógiákkal természettudományt: *„Visszatérve a CP-sértés problematikájához, van tehát egy megmaradási törvény, a CP-paritás megmaradása, amely 99,8 százalékban érvényes, de ugyanakkor a $K_2^3$ mezon két pi-mezonos bomlásánál a megmaradási törvény szerkezete fellazul és szisztematikusan 0,2 százalékos, nagyon kicsiny CP-sértés lép fel. Következésképpen a »törvény szövedéke itt, egy kicsit fölfeslik«, de csak 0,2 százalékosan, 99,8 százalékban továbbra is érvényben marad.”*, [32, 92. o.].)

De nézzük most a matematika szempontjából érdekes részt! Ugyanezen levélben ezt írja: *„Az a egyenes hossza:* $\infty = 1\infty$. *A b görbe hossza:* $\infty + \infty + (x\infty) = 2\infty$, $3\infty$, $\ldots$, $x\infty$. *Tehát a b görbe hossza legalább 2 végtelennél több. T.i. vedd magadat tengelynek, akkor ha jobbról indul a görbe balra, éppen mert görbe, vissza is tér, akkor is, ha szabálytalan és a visszatérés is legalább* $1\infty$*, amennyi az odahaladás. Ez azután geometriailag igazolja, hogy van* 1. 2. 3. … *x. rendű végtelen és így zérus. Három pont, két egymást metsző egyenes (tehát összetartó, párhuzamos) vagy 1 görbe meghatároz egy síkot. (Azt hiszem nem mondták még ki ezt a kézenfekvő dolgot a görbével.) No most, ha az egyenes mozog, nem a saját irányában, síkot alkot. A mozgás egy speciális esete a forgás, ha idegen tengely körül történik, szintén síkot alkot. No most képzelj el egy parabólát forgó mozgásban, még pedig úgy, hogy a mozgási tengely a szárainál, a végtelenben van. Tehát: [11.8. ábra] Ekkor szintén »sík« jön létre, amely sík zárt egész, s amely síknak vetületei, az engem érdeklö helyzetben: [11.8. ábra] Ez a »zárt sík«, ha az A tengely körül forog, korongalaku testet kapunk, míg ha a B tengely körül forog, egyáltalában nem kapunk testet. Ami azt hiszem, azt bizonyítja geometriailag, hogy van abszolút zérus, tehát a 0 értékek sorozatának limese. T.i. a pontnak nincs kiterjedése, 2 pontnak szintén 3-nak szintén nincs kiterjedése, tehát* $0_0$, $0_1$, $0_2$, $0_3$, …, *ahol a* $0_0$ *geometriai értékét a fentebb, a B tengely körüli forgás ered-*

*ménye jelzi. (A pontnak nincs kiterjedése, ezért nem foroghat a »saját tengelye« körül, mely esetben az eredmény ugyanaz volna.)"* ([12, 94. o.]).




11.8. ábra. József Attila levelének facsimile részlete (balra) és a válogatott levelezésben található stilizált ábrák (jobbra).

Ezen gondolatok elemzését meg a parabola forgatását meghagyom egy másik írás tárgyának, de azt hiszem ennyiből is érzékelhető, hogy a matematikában is érvényesülnek a fizikában korábban mondottak, hogy ti. József egy sor fogalmat nem pontosan használ, és a kiinduló koncepciókat szabadon alakítja úgy, mintha a szavak egymás után fűzése egyúttal matematikai levezetés, illetve bizonyítás is lenne. (Valójában a sík görbületére vonatkozó gondolatait is valószínű, hogy a relativitáselmélet nagyon naiv értelmezései adták.) A magabiztossága ugyanakkor e tekintetben is olyan, mint a korszak több más leveléből is érződik; 1926 februárjában ezt írja Jolán nővérének: *„a szabálytalan görbékre vonatkozó fejtegetéseimmel erős lökést adtam a geometriának"* ([12, 98. io.]).

Amiért mégis ide idéztem a dolgot, azon túl, hogy a diszkusszió teljességéhez hozzá tartozik, egy későbbi fejlemény ezen idézet kapcsán. A már említett Galamb Ödön, József Attila makói tanára és pártfogója 1941-ben könyvet adott ki Józseffel kapcsolatos emlékeiről, *Makói évek* címmel. A könyvben Galamb felidézi ezt a levélváltásukat is, viszont érzékeli, hogy a tartalmát nemigen tudja megítélni (Galamb latin-történelem-gyorsírás tanár volt, József Attilának görögpótló[10] irodalmat tanított, [25]), úgyhogy erre tekintettel a lehető legfelelősebb döntést hozta, és inkább kikérte egy hozzáértő, Kun-Kuti Márton matematikatanár-társa véleményét. (Bár ma is így járnának el a könyvek és újságok szerzői hasonló helyzetben…) Kun-Kuti pontokba foglalva fogalmazta meg észrevételeit; véleményem szerint 80 év távlatából is helytálló, tanulságos módon:

[10] Az 1924-es reformig így nevezték azokat a tárgyakat, amit a tanulók az 1890-ben eltörölt kötelező görög helyett tanultak a gimnáziumokban.

*„– A valóságtudományok szakemberei – az eredményért való felelősségük tudatában – nagy gonddal vigyáznak arra, hogy állításaik a bizonyíthatóság kereteit ne lépjék túl. Ez pedig a szabadon csapongani szerető fantáziát oly nagy mértékben korlátozza, hogy az eredmény rendszerint nagyon szerény.*

*– Egészen más a helyzet az ú.n. művészlelkű embereknél. Az ő fantáziájuk szabadon csaponghat. Nem korlátozza semmi. Ezért van az, hogy az írók, költők, művészek fantáziája a dolgok lényegének oly mélységeire is rátapint néha, ahova a bizonyíthatóság keretein belül maradó ész talán soha sem juthat el. Egyes írók – pl. Verne, Jókai – oly gépekről írtak részletesen, melyeket később találtak fel. Vagy a valóság titkairól néha oly elgondolásokat nyilvánítottak, melyeket a tudomány később igazolt.*

*– Ilyen szabadon csapongó fantáziájú, erős intuíciójú művészlélek volt József Attila is. [. . . ]*

*– Egy másik helyen igen érdekes – de nem új – matematikai problémát fejteget. . . A sík végtelen sugarú gömb felületeként fogható fel. A gömbfelület görbe. A sík nem görbe. Mégis a kettő azonosítható. Ezért kérdezi: – Van-e görbe sík? – Itt nyilván; a van alatt fogalmi és nem tárgyi létezésre gondol.*

*– Fejtegeti a végtelen problémáját. Mint a legtöbb nem szakember, ő is a végtelent valami misztikus színezetű, észfölötti távolságok homályába vesző, konkréten létező objektumnak tekinti. Nem gondolva arra, hogy a matematikus a végtelen alatt nem valami ténylegesen létező objektumot, hanem pusztán csak végnélküliséget ért, azaz pl. egy végtelen sorozatnál annyit és csak annyit ért alatta, hogy akármily távoli tagot szemelünk is ki, azon túl a sorozatnak még van tagja. Tehát a végtelen csak egy – az emberi értelmet túl nem lépő – tulajdonság a matematikában, melynek létmódja az érvényesség és nem a tárgyi létezés. Valószínűleg ez az oka annak, hogy a végtelen nagy és végtelen kicsi számmal éppen úgy szoroz, mint a közönséges számokkal, pedig végtelen nagy és végtelen kicsi szám voltaképpen nincs is.*

*– A tárgyi precizitás részleteitől eltekintve elmélkedései mélyre tapintó érdekes gondolatokat tartalmaznak, melyek a valóság megismeréséért évezredek óta világszerte folyó óriási szellemi küzdelemnek több legizgatóbb problémáját érintik”* ([7, 71–73 o.]).

Ha már úgyis emlegettem korábban József Jolán regényét, nem tudom megállni, hogy egy roppant érdekes momentumra fel ne hívjam a figyelmet ezen a ponton.

Kun-Kuti előbbi véleménye Jolán művében is megjelenik – *csak épp abban Rákosi Mátyás mondja!* József Jolán ideologikusan nagyon terhelt regényében[11] ugyanis a fiatal Rákosi találkozik József Attilával, sőt – minő véletlen – a találkozás *„éles fordulatot jelentett Attila szellemi fejlődésében”*, és *„Marx gazdasági tanainak, a marxi történelemfilozófiának ismeretét ekkor kapta útravalóul”* ([17, 166. o.]). (Az egyébként elképzelhető, hogy József Attila és Rákosi tényleg találkozott, de az összes többi már az 1948 utáni kommunista rendszer primitív, propagandisztikus kitalációja. Helyenként abszurdba hajló mozzanatokkal tarkítva: József Jolán, mint újságíró 1949-ben interjút készített Rákosi Mátyással, ami az országgyűlési választások napjára időzítve jelent meg, ebből megtudjuk, hogy a jóságos Rákosi még a börtönből is egyengette József Attila útját... ([15]). Szőke György izgalmas cikkben járt utána annak, hogy mindebből mi lehet igaz, [31].) József Jolán regénye szerint Makai Ödönt, Attila sógorát – egyben gyámját, és a történet időpontjában szállásadóját – látogatja meg Rákosi, akinek Makai ezt mondja: *„Éppen a végtelen problémáját fejtegette az ifjú. Úgy sejtem – nézett Attilára –, azt akartad bizonyítani, hogy a végtelen valami észfölötti távolságok homályába vesző, valóságban létező objektum.”*, mire Rákosi azt válaszolja: *„A végtelen csak egy tulajdonság a matematikában. Létmódja az érvényesség, nem pedig a tárgyi létezés.”*. Azaz: József Jolán fogta a makói matematikatanár véleményét, és a bölcs Rákosi Mátyás[12] szájába adta!

[11] József Jolán műve szívbemarkoló képet fest a ’10-es, ’20-as, ’30-as évek rongyokban járó, éhező, poloskák között ablaktalan lyukakban tengődő munkásainak, cselédjeinek, nincstelenjeinek tömegeiről, és nem lehet kétségünk, hogy e kép megfelel a valóságnak, különösen, mert ezek Jolánnak is személyes élményein nyugszanak, ettől függetlenül a munkásmozgalom bemutatása még ezekben a részekben is zavaróan didaktikus a regényben. Jolán ráadásul, amellett, hogy egyéb esetekben is kever dátumokat, eseményeket, a József Attila-képet is érezhetően igyekszik sematikusan heroizálni (nem mintha erre József rászorulna). Csak egyetlen példa: a regényben Attila azért nem tér vissza a makói internátusba utolsó évében, 1922 őszén, mert *„még a nélkülözést is inkább vállalja, mint hogy visszamenjen a megyei birtokosok és nagygazdák csemetéi közé”* ([17, 132–133. o.]). A valóságban József azért nem tudott visszamenni, mert 1922. június 26-án gyógyszerrel öngyilkosságot kísérelt meg, ami automatikus kicsapással járt, ezt egy korábbi diák példájából ő is tudhatta ([7, 21–25. o.]). József Jolán könyvében azonban már csak azért sem derülhet ki ez az összefüggés, mert ő még az öngyilkossági kísérlet tényét is elhallgatja! Az ilyen torzítások jóval kevésbé – bár még így sem elhanyagolhatóan – voltak jelen Jolán tíz évvel korábban, 1940-ben írt, *József Attila élete* címet viselő könyvében ([16]). Valachi Anna szerint, aki Jolánról *József Jolán, az édes mostoha – Egy önérvényesítő nő a XX. század első felében* címmel egész könyvet írt, az 1950-es regény megírására a Rajk-per alatt kapott pártmegbízást, és nem mert rá nemet mondani ([37]).

[12] 1975-ben újra kiadták József Jolán 1950-es regényét, de akkorra meg már Rákosi személye vált kellemetlenné. Jellemző a korabeli szocialista viszonyokra, hogy a problémát úgy hidalták át,

(Azzal a már-már mókás módosítással, hogy valójában még Makai Ödön szabatosan megfogalmazott felvetésének a megszövegezését is Kun-Kutitól kölcsönözte…) Természetesen az időpontok sem stimmelnek, hiszen ekkor a regényben József még el sem utazott Bécsbe, márpedig, mint láttuk, a valóságban egy onnan írt levelében vetette fel először ezt a problémát.

Még egy érdekes „kapcsolódási pontot" hadd említsek meg József Attila és a matematika között. Egy pillanatra visszaadom a szót Tverdota Györgynek, amint az *Eszmélet* keletkezését datálja: *„ha nem feltételezzük, hogy a XII. szakaszt 1934 júliusában vagy augusztusában, Budapestre, a Korong utcába való 1934. július 1-je táján történt visszatérése után írta, akkor a »Vasútnál lakom«– kijelentést korrekt módon csak Hódmezővásárhelyen történt ideiglenes letelepedése, 1934. március 1-je előtt és Szántó Judittal a Korong utcába költözésük (valószínűleg 1933. október) után tehette"* ([36, 15. o.]). Mint az ebből is kiderül, József Attila, ha megszakításokkal is, de többször élt a Korong utcában; egész pontosan a Korong utca 6. szám alatt. Ha valaki elzarándokol erre a címre, akkor csakugyan megtalálja József Attila emléktábláját a házon. De megtalál egy másik emléktáblát is… (11.9. ábra).

Bizony ám, pontosan ugyanabban a házban lakott Arany Dániel, mint József Attila! Bóra Eszter alapos tanulmányban mutatta be[13] Arany Dániel életútját ([5]), kitérve a Józseffel való kapcsolatára is: *„Arany Dániel 1896-ban Budapesten épített egy villát, ez a mai napig áll a körvasúton túl Zuglóban a mai Korong utca 6. szám alatt. Ebben a csodálatos villa-lakásban élt és dolgozott a nagy műveltségű, széles érdeklődésű matematikus. A ház érdekessége, hogy 1933–1936 között József Attila bérelt benne egy szerény padlásszobát, »a város peremén«. Nem ismert, hogy a költő kitől bérelte a kis szobát, de annyi biztos, hogy ismerték egymást a matematikussal* ([5, CLIV. o.]), bár sajnos ez utóbbi állítást nem részletezi a cikk.[14] (Feltűnő lehet az emléktábláról, hogy Arany Dániel halálának a dátuma nem ismert pontosan. 1944-ben gettósították Arany Dánielt zsidó származása miatt – jellemző adalék, hogy még ekkor is hazájára és a matematikára gon-

hogy egész egyszerűen kihúzták a könyvből Rákosi nevét, de a személyét és a történetszálát nem, így az ezen kiadást olvasók csak arról értesülhettek, hogy József Attila egy név nélküli idegennel találkozik, aki alapvetően hat az életére…

[13] Bóra középiskolás diák volt a cikkének publikálásakor!

[14] Bóra Eszter újabb kutatásaiból kiderült, hogy mégsem valószínű a feltételezett ismeretség: ld. https://ematlap.hu/tudomany-tortenet-2021-7/1085-bora-eszter-arany-daniel-es-jozsef-attila-lakasa-a-korong-utcaban


11.9. ábra. A Korong utca 6. szám alatti emléktáblák együtt (felül) és a két emléktábla közelebbről (alul).

dolt: gyorsan elajándékozta hatalmas könyvtárát az Eötvös Loránd Matematikai és Fizikai Társulatnak, hogy a háború utáni újrakezdésnél legyen szakirodalma az országnak; ezek a könyvek egyébként máig fellelhetőek a BME Matematikai Intézetének könyvtárában – és a gettót nem élte túl. A magyar matematikatanítás egyik legnagyobb alakját, a Középiskolai Matematikai Lapok megalapítóját úgy pusztították el feleségével együtt, hogy még a halálának pontos dátuma sem ismert, hamvai jeltelen sírban nyugszanak.)

Nagyon sokat beszéltünk József Attiláról, de mi a helyzet Pákozdy Ferenccel? Az ő életéről, és természettudományos érdeklődésről jóval kevesebb forrással rendelkezem (valószínűleg jóval kevesebb is áll rendelkezésre), de ennek ellenére egyáltalán nem meglepő, hogy a kérdést felvető levélnek ő is szerzője. Pákozdy ugyanis, amellett, hogy maga is költő és műfordító volt, és – mint a Tverdota idézetből is kiderült – József Attila barátja és hódmezővásárhelyi körének tagja, meglehetősen polihisztor alkat volt: eredetileg orvosnak tanult, aztán jogot végzett, dolgozott jegyzőként, levéltárosként majd évtizedekig könyvtárosként, mindemellett kitűnő sakkozóként is ismerték ([1, 18]).

Kitérő megjegyzés Pákozdy kapcsán: talán többen tudják, hogy történetesen – és teljesen véletlen egybeesésként – Pákozdy Ferencnek hívták azt a költőt is, akinek az 1933-ban a *Társadalmi Szemlében* megjelent kritikája, melyben azt írta, hogy a *„magyar proletárirodalom sok problémája uj problémával szaporodott: József Attilával”* szerepet játszott József Attila és az illegális kommunista párt kapcsolatának megromlásában. (Pákozdy, mármint a bántó kritikát író Pákozdy[15] számára érhető módon elég kellemetlenné vált[16] később ez az írás, 1954-ben azzal magyarázkodott Révai Józsefnek, hogy valójában nem gondolta így a leírtakat, csak az újság szerkesztőinek, Madzsar Józsefnek és Sándor Pálnak a nyomására jelentette meg a kritikát, akik arra hivatkoztak, hogy József Attila elítélése „a párt kívánsága” ([21]). Érdekes adalék, hogy Sándor Pál egy 1964-es írásában ezt kategorikusan tagadta: „1. Én a Pákozdy által említett megbeszélésen nem vettem részt. 2. Sem Pákozdy, sem a Társadalmi Szemle egyetlen munkatársa előtt sem hivatkoztam soha arra, hogy »ez a párt álláspontja«. [. . . ] 3. Pákozdy levele szerint azon a beszélgetésen Madzsar vitte a szót és elsősorban saját kifogásait hozta fel a József Attila magatartásával kapcsolatban és fejtette ki véleményét a megírandó cikkre vonatkozólag.” ([28]). Madzsar nem volt abban a helyzetben, hogy tiltakozzon, ugyanis az anya- és csecsemővédelem hazai megszervezőjét, a honi népegészségtan egyik legnagyobb alakját addig zaklatta a Horthy-rendőrség (Madzsar illegális kommunista volt), amíg a Szovjetunióba emigrált – ahol meg aztán két év után utolérte a sztálini tisztogatás: a kommunista pribékek minden nyom nélkül eltüntették, a mai napig még csak azt sem tudni, hogy egyáltalán hol vagy mikor halt meg. Madzsar helyett azonban a lánya, Lili beszállt a ringbe: *„Apám 1945 után már nem élt, s Sándor Pál – kihasználva a lehetőséget – úgy védekezett, ahogy tudott. Azt állította, hogy a cikk megírásához neki nem volt köze, arra édesapám adta a megbízatást. Ezt a tényekkel határozottan meg lehetett cáfolni, hiszen apám a cikk megjelenését megelőző hó-*

[15]Érdekességként megjegyzem, hogy a Wikipedia e sorok írásának pillanatában is azt írja a kritika kapcsán, hogy József Attila tudta, hogy az írás nem Pákozdy gondolatait tükrözi, mert korábban Pákozdy a *Hétfői Újságban* József Attila mellé állt. Igen ám, de a *Hétfői Újság* egy hódmezővásárhelyi lap volt, így – bár ez vegytiszta spekuláció a részemről – de elég gyanúsnak tűnik, hogy ez a Pákozdy valójában a másik Pákozdy volt, és így persze az egész okfejtés bukik. A keveredés nem lenne teljesen példátlan, vicces módon még a 2004-es kiadású Új Magyar Életrajzi lexikon hódmezővásárhelyi Pákozdyról szóló szócikkébe is bekerült hivatkozásként egy olyan cikk, ami valójában a másik Pákozdyról szól ([20]).

[16]Hogy „kellemetlenné vált”, az enyhe kifejezés, például az 1951-ben kiadott gimnáziumi tankönyvben ezt olvashatta Pákozdy saját magáról: *„a kötettel kapcsolatban támadás érte [József Attilát] a munkásmozgalom egy szektáriánus, tehetségtelen költője részéről is”. . .*

*napokban börtönben volt, s minthogy eléggé rossz egészségi állapotban volt, idejött hozzánk Kassára, s egy ideig itt tartózkodott.”* ([22]). Ezt meg Sándor vitatja ([28, 38]), szóval mondhatjuk, hogy a kör bezárult...

## 5. Zárszó

Ha az írásom elején nagyon szubjektív voltam, hadd legyek a végén is az. Az Eszmélet nem olyan, mint a többi – szerintem – nagyon szép József Attila vers, a *Tiszta szívvel*, a *Thomas Mann üdvözlése* vagy az *(Ime, hát megleltem hazámat)*. Sokszor kell elolvasni. Nem „érti” az ember elsőre, de ahogy újra és újra elolvassa, egyre közelebb kerül hozzá, míg egyszer csak azt nem veszi észre, hogy libabőrös lesz, ahogy az utolsó sorok végére ér.

### Köszönetnyilvánítás

Mindenekelőtt hálás köszönetemet szeretném kifejezni Tverdota Györgynek (ELTE BTK Modern Magyar Irodalomtörténeti Tanszék): számomra már az is rendkívül megtisztelő, hogy az egyik legnagyobb József Attila-kutató vette a fáradságot, és egy hozzám hasonló teljes kívülálló írását egyáltalán elolvasta. Tverdota György azonban ennél sokkal többet tett, részletes magyarázattal szolgált számomra József Attila matematikai érdeklődése és ismeretei kapcsán; a Konklúzió fejezet idevágó részét teljes egészében az ő útmutatása alapján kutattam fel és írtam meg. Köszönöm Maczák Ibolyának (PPKE BTK Magyar Irodalomtudományi Tanszék) a segítőkészségét, és hogy több forrásra is felhívta a figyelmemet Pákozdy Ferenc (József Attila barátja...) kapcsán. Köszönöm Tóth Jánosnak (BME TTK Analízis Tanszék) a nagyon kedves szerkesztői munkát, és különösen, hogy felhívta a figyelmemet a Korong utca 6. szám alatti emléktáblapárra.

# Irodalomjegyzék

[1] Bata Imre. A vásárhelyi poéta. Pákozdy Ferenc emlékezete. Tiszatáj, 31(4):72–76, 1977.

[2] Beke Manó. Determinánsok. Athenaeum Irodalmi és Nyomdai R.-T., 1915.

[3] Beke Manó. Bevezetés a differenciál- és integrálszámításba: a Népszerű Főiskolai Tanfolyam 1906-ik évi II. sorozatában tartott előadások. Franklin-Társulat, 2 edition, 1920.

[4] Beney Zsuzsa. Az eszmélet lírája. Tiszatáj, 43(1):60–69, 1989.

[5] Bóra Eszter. Ismeretlen ismerősünk: Arany Dániel. Természet Világa, 140(10):CLI–CLV, 2009.

[6] Fehér Erzsébet. József Attila válogatott levelezése. Akadémiai Kiadó, 1976.

[7] Galamb Ödön. Makói évek. Cserépfalvi, 1941.

[8] Gazda István. Einstein relativitáselméletének első hazai interpretátorai. Magyar Tudomány, 24(6):476–483, 1979.: http://real.mtak.hu/19206/1/gazda_MATUD_1979.pdf.

[9] Gazda István. József Attila és a relativitáselmélet. Kritika, 80(3):4–6, 1980.

[10] Izrail Moiseevitch Gelfand and Sergei Vasilyevich Fomin. Calculus of variations. Courier Corporation, 2000.

[11] Szemjon Grigorjevics Gingyikin. Történetek fizikusokról és matematikusokról. Typotex, 2004.

[12] H. Bagó Ilona, Hegyi Katalin, Stoll Béla. József Attila levelezése. Osiris Kiadó, 2006.

[13] Járai Antal. Modern alkalmazott analízis. Typotex, 2007.

[14] David C. Johnston. Cycloidal paths in physics as superpositions of translational and rotational motions. American Journal of Physics, 87(10):802–814, 2019. https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.5115340.

[15] József Jolán. Rákosi Mátyás József Attiláról. Szabad Nép, 7(112):11, 1949.

[16] József Jolán. József Attila élete. Szépirodalmi Könyvkiadó, 1955.

[17] József Jolán. A város peremén. Móra Ferenc Könyvkiadó, 1975.

[18] Kenyeres Ágnes. Magyar életrajzi lexikon. Akadémiai Kiadó, 1994.

[19] Kósa András. Variációszámítás. Tankönyvkiadó, 1973.

[20] Kőszegfalvi Ferenc. Pákozdy Ferenc (1904–1970) bibliográfia, 2003.

[21] Legát Tibor. József Attila esete a két Pákozdy Ferenccel, akik szintén költők voltak. Magyar Narancs, 2020. https://magyarnarancs.hu/sorkoz/jozsef-attila-esete-a-ket-pakozdy-ferenccel-akik-szinten-koltok-voltak-128728 (elérés dátuma 2020. 10. 06.).

[22] Madzsar Lili. Madzsar Lili visszaemlékezése. Palócföld, 22(6):51–59, 1988.

[23] Marx György. A modern fizika forradalma és József Attila. Új írás, 21(2):66–70, 1981.

[24] Nobel Prize organisation. Nomination archive – Arnold Sommerfeld, 2020. https://www.nobelprize.org/nomination/archive/show_people.php?id=8661 (elérés dátuma 2020. 10. 16.)

[25] Péter László. József Attila közöttünk. Somogyi-könyvtár, 1980.

[26] Reiman István. A geometria és határterületei. Gondolat, 1986.

[27] Rózsa Pál. Bevezetés a mátrixelméletbe. Typotex, 2009.

[28] Sándor Pál. József Attila és az illegális kommunista párt. Kritika, 80(3):7–9, 1980.

[29] George F. Simmons. Differential equations with applications and historical notes. CRC Press, 2016.

[30] Simon Péter. "József Attila és a fizika". Természet Világa 136.11 (2005), 495–498. old.

[31] Szőke György. „Akire csak a párt vigyáz. . . ". Forrás, 37(4):58–62, 2005. https://epa.oszk.hu/02900/02931/00076/pdf/EPA02931_forras_2005_04.pdf

[32] Toró Tibor. József Attila transznegatívum-elmélete és az anyag-antianyag-szimmetria(sértés). Természet Világa, 137 (I. különszám):88–92, 2006. https://www.termvil.hu/archiv/szamok/kulonszamok/k0601/toro.pdf

[33] Tóth János, Simon L Péter. Differenciálegyenletek. Bevezetés az elméletbe és az alkalmazásokba. Typotex, 2020.

[34] Tuska Ágnes. "... a működésben van a nyugalom". Fizikai Szemle 30.11 (1980), 430–434. old.

[35] Tverdota György. József Attila költészetének kozmológiai vonatkozásai. Irodalomtörténeti Közlemények, 83(2):121–133, 1979.

[36] Tverdota György. Tizenkét vers. József Attila Eszmélet-ciklusának elemzése. Gondolat, 2004.

[37] Valachi Anna. Három testvér – háromféle kísérlet az elveszett gyermekkor visszahódítására. Thalassa, 12(2-3):145–154, 2001. http://imago.mtapi.hu/a_folyoirat/e_szovegek/pdf/(12)2001_2-3/145-154_Valachi-A.pdf.

[38] Vértes György. József Attila és az illegális kommunista párt. Irodalomtörténeti Közlemények, 21(2):192–218, 1963.

[39] Robert Weinstock. Calculus of variations: with applications to physics and engineering. Courier Corporation, 1974.

*Ferenci Tamás*

*Ferenci Tamás klinikai biostatisztikus, orvosbiológiai mérnök, az Óbudai Egyetem Élettani Szabályozások Kutatóközpontjának habilitált egyetemi docense. Emellett a Budapesti Corvinus Egyetem Statisztika Tanszékének félállású docense és a Semmelweis Egyetem Népegészségtani Intézetének óraadó oktatója.*

Magyar Zsolt

# Hitel, törlesztőrészlet, járadékszámítás
**(2021. december, Tanóra – szakkör)**

## Miért tanulunk kamatszámítást?

A bankbetétek, hitelek kamatozása az úgynevezett kamatos kamatozás szerint történik, amelynek matematikai alapját a mértani sorozatok jelentik. Ahhoz, hogy az alkalmazott matematikai modelleket és számításokat mindenki megértse, fel kell idézni a középiskolában a mértani sorozatról tanult ismereteket. Aki tisztában van a mértani sorozat tulajdonságaival és összegképletével, az átugorhatja a bevezetést.

## Bevezetés

### Mértani sorozat

**Definíció.** Mértani sorozatnak nevezzük azt a számsorozatot, amelyben [a másodiktól kezdve] bármelyik tagnak és az azt megelőző tagnak a hányadosa állandó. Ezt az állandó hányadost $q$-val jelöljük, és a mértani sorozat hányadosának (kvóciensének) nevezzük.

A definícióból következik a mértani sorozat rekurzív képzési szabálya:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q.$$

[$q > 0$ esetén a tagok előjele azonos, $q < 0$ esetén a tagok előjele váltakozó.]

Teljes indukcióval könnyen belátható, hogy a mértani sorozat $n$-edik tagját az $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ képlettel adhatjuk meg.

**Megjegyzés.** Ez a definíció kizárja az $a_1 = 0$, illetve $q = 0$ eseteket. Ekkor ugyanis vagy a 0, 0, 0, $\ldots$, vagy az $a$, 0, 0, 0, $\ldots$ típusú sorozatokat kapnánk, azonban kényelmi szempontok miatt ezeket nem tekintjük mértani sorozatoknak.

Egyszerűen megmutatható, hogy $a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1}$. Nem mondhatjuk azonban [a számtani sorozattal analóg módon], hogy a mértani sorozat egy tagja az őt közrefogó elemek mértani közepe, hisz a mértani sorozatnak negatív tagjai is lehetnek, így a fenti kijelentésünk nem lenne összhangban a mértani közép definíciójával.

Helyesebb tehát csak a pozitív tagú mértani sorozatokra szorítkozni ebben az esetben. Ekkor megállapíthatjuk, hogy a pozitív számokból álló mértani sorozat bármely három egymást követő elemére igaz, hogy a két szélső mértani közepe egyenlő a középső taggal.

**Megjegyzés.** Természetesen mértani sorozatról beszélünk abban az esetben is, ha $q = 1$.

## A mértani sorozat első $n$ tagjának összege

Idézzük fel a gimnáziumi első osztályos tananyagból az $a^n - b^n$ kifejezés szorzattá alakítását!

$$a^n - b^n = (a-b) \cdot \left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right).$$

A mértani sorozat első $n$ tagjának összegzésekor az alábbi összeget kell kiszámítanunk:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1} = a_1 \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\right).$$

Ha a zárójeles kifejezést összevetjük a fenti szorzattal, akkor látható, hogy ott $a = q$, $b = 1$ helyettesítéssel hasonlót kapunk:

$$q^n - 1 = (q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1).$$

Ha $q = 1$, akkor természetesen $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, azaz $S_n = na_1$, ha $q \neq 1$, akkor pedig $q-1$-gyel leoszthatunk:

$$a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1) = S_n.$$

Ezeket az összefüggéseket fogjuk a továbbiakban felhasználni.

## Kamatszámítás

### Mi a kamat?

A kamat egyszerűen fogalmazva a pénz (helyesebben tőke) szolgáltatásainak az ára. A kamat (helyesebben szólva inkább a hozam) a befektető jutalma azért, hogy tőkéjét lekötve elhalasztja a fogyasztását. A kamat fogalma szorosan összefügg a pénz időértékével. A pénz időértéke legegyszerűbben kifejezve annyit jelent, hogy egy forint „ma” többet ér, mint ugyanez az egy forint „holnap” (a „ma” alatt itt a jelent, míg a „holnap” alatt a jövőt kell érteni), mert a mai forint befektethető és kamatozik. Másként kifejezve a befektető a kamatot mint jutalmat azért kapja, mert a mai biztos forintot felváltja egy jövőbeni kockázatos forintra. (Forrás: https://sevenday.ewk.hu/kamatos-kamat-csodaja/)

## Kamatos kamat

Egy adott év elején befizetünk a bankba 10 000 Ft-ot. A bank évi 5% kamatos kamatot ad a betét után, a kamatot mindig az év végén írják hozzá a betétünkhöz. Hány forintunk lesz a bankban 20 év elteltével?

**Megoldás.** A bank által adott kamattal minden év végén a pénzünk 1,05-szorosára változik. 20 év elteltével a kamattal növelt összeg $10\,000 \cdot 1{,}05^{20} \approx 26\,533$ Ft lesz.

**Definíció.** ***Évi kamatos kamat:*** a kamat jóváírása évente egyszer történik, év végén. A kamatláb az egész évre érvényes kamatlábbal egyezik meg.

**Definíció.** ***Havi kamatos kamat:*** a kamat jóváírása havonta egyszer történik, a hónap végén. A kamatláb az egész évre érvényes kamatláb $1/12$ részével egyezik meg.

## Történelmi kapcsolódás: Manhattan „megvásárlása”

New York-i hagyományok szerint Manhattan-t 1626-ban a hollandok 60 guldenért (24 dollárnyi holland pénzért) vették meg az indiánoktól. (Valójában ez inkább területhasználati díjnak számított akkoriban. Az esetről Pieter Schaghen holland kereskedő számolt be a West India Company vezetőinek küldött, 1626. november 7-én kelt levelében.) Az indiánok egyik késői leszármazottja be akarta perelni az Egyesült Államokat, hogy milyen előnytelen üzletet kötöttek az ősével, és kártérítést szeretett volna kapni. Azonban mielőtt a perre sor került volna, egy ügyvéd kiszámította, hogy nem az ár volt alacsony, hanem rosszul fektették be a vételárat: ha az 1626-ban kapott 24 dollárt akkoriban nagyon alacsonynak számító, mindössze 6%-os kamatra fektették volna be, akkor a közben eltelt 380 év alatt körülbelül $24 \cdot 1{,}06^{380} \approx 99\,183\,639\,921$ dollárra növekedett volna az összeg, ami nem nevezhető alacsonynak.

## Hitelkamatok összetétele

### Mi határozza meg a banki hitelkamat mértékét?

• **infláció:** a kamatok jelenléte azt az általános várakozást eredményezi, hogy a jövőben mindenkinek több pénze lesz, így a növekvő pénzösszeggel együtt az árak emelkedése is közös társadalmi elvárás. Ez a növekedés az infláció, ami a pénz vásárlóértékének csökkenésével jár együtt. A pénzkölcsönzők semmiképpen sem akarnak kisebb vásárlóértékű pénzt visszakapni, mint amennyit kölcsön adtak, ezért általában a kamat az infláció feletti értéket vesz fel.

• **nyereség:** a pénzkölcsönző szervezet működési költsége

• **kockázati felár:** mennyire biztos a kölcsönző abban, hogy visszakapja a pénzét. A kockázati felár fedezi a vissza nem fizetett hitelekből származó veszteségeket is.

### Nem egyidejű kifizetések: jelenérték

• Az inflációs hatás miatt a nem egyidőben történő kifizetések nominális értékének puszta összehasonlításával nem tudunk korrekt elszámolást végrehajtani. Nem mindegy, hogy egy adott pénzösszeg mikor kerül kifizetésre.

• Az összehasonlíthatóság alapja, hogy az összegeket „normáljuk”, egy adott, közös időpontbeli értékét vegyük figyelembe. Ezt az értéket hívjuk jelenértéknek. A jelenérték lehet természetesen jövőbeni időpontra számított is.

### Példa egy elszámolásra a jelenértékszámítás alkalmazásával

A parlament eldönti 2018-ban, hogy 2021-re új kulturális központot építenek fel. Erre a célra 26 milliárd forintot szavaznak meg. A munkálatok elkezdődnek 2018-ban, és 2021-ben érnek véget.

A pénzek kifizetése a kivitelezőnek az alábbi ütemezésben történt:

2018-ban: 1 milliárd forint

2019-ben: 10 milliárd forint

2020-ban: 5 milliárd forint

2021-ben: 12 milliárd forint, ez így összesen $1+10+5+12=28$ milliárd forint.

Az elszámolás alapja azonban nem lehet a konkrét kifizetett számlák összege, hiszen közben az infláció miatt emelkedtek az árak, és az esetleges túllépés nem jelenti azt, hogy a tervektől eltértek, de azt sem, hogy nem tértek el.

**Megoldás.** 2018-as árszínvonalon számítsuk ki az elköltött összeget

Az éves inflációt tekintsük az egyszerűség kedvéért 4%-nak.

a 2018-ra számított jelenértékek összege:

$$1+\frac{10}{1{,}04}+\frac{5}{1{,}04^2}+\frac{12}{1{,}04^3}=1+9{,}615+4{,}623+10{,}668=25{,}906.$$

Ennek alapján a 2018-ban meghatározott költségvetési keretet az építkezés nem lépte túl.

## Gyűjtőjáradék – takarékoskodás folyamatos befizetésekkel

20 éven át minden év elején befizetünk a bankba 12 000 Ft-ot. A bank évi 6%-os kamatos kamatot ad a betétünkre. Hány forintunk lesz a 20 év elteltével a számlánkon?

Nézzük végig a folyamatot úgy, ahogy az időben zajlik. Ekkor az alábbi számítássort kapjuk a 20. év végén rendelkezésre álló összegre:

$$\Big(\dots\Big(((12\,000\cdot 1{,}06+12\,000)\cdot 1{,}06+12\,000\big)\cdot 1{,}06+12\,000\Big)\dots\Big)\cdot 1{,}06,$$

ahol az 1,06-os szorzók száma 20 db (minden év végén hozzájön egy újabb szorzótényező).

A zárójeleket kifejtve a

$$12\,000 \cdot 1{,}06^{20} + 12\,000 \cdot 1{,}06^{19} + 12\,000 \cdot 1{,}06^{18} + \ldots + 12\,000 \cdot 1{,}06$$

összeget kapjuk, amely egy mértani sorozat első 20 tagjának összege: a sorozat első tagja $12\,000 \cdot 1{,}06$, hányadosa 1,06. A keresett összeg:

$$12\,000 \cdot 1{,}06 \cdot \frac{1{,}06^{20} - 1}{1{,}06 - 1} \approx 467\,913 \text{ Ft.}$$

**Megjegyzés:** A

$$12\,000 \cdot 1{,}06^{20} + 12\,000 \cdot 1{,}06^{19} + 12\,000 \cdot 1{,}06^{18} + \ldots + 12\,000 \cdot 1{,}06$$

összeget megvizsgálva egy újabb értelmezést is felfedezhetünk: a betett pénzösszegeket egymástól elkülönülően kamatozó betétekként felfogva az egyes betétek kamatos kamatokkal növelt értékének összegét láthatjuk.

Gyűjtőjáradék típusú pénzgyűjtés folyik pl. a magán- és önkéntes nyugdíjpénztárakban, a befektetési életbiztosításokban, illetve a néhány éve bevezetett, állam által támogatott nyugdíjbiztosításokban.

A nyugdíjbiztosítás gyűjtőjáradék számítása hasonlóan történik, azonban annyi módosítással, hogy mivel a fizetésünket utólag kapjuk meg, ezért a befizetések nem az adott periódus elején, hanem a következő periódus elején (vagyis lényegében az aktuális periódus végén) zajlanak, így a kitevők 1-gyel elcsúsznak a fenti számításhoz képest (mert nem kamatozással, hanem befizetéssel ér véget a gyűjtő időszak).

Havi befizetések esetén a bank általában nem ad havi kamatos kamatot. Az általános eljárás az, hogy a befizetett összegekre 3 havonta írják jóvá a kamatot a gyűjtőszámlán, a biztosítók pedig éves szinten átlagosan megjelenő hozamot szoktak számítani, a hozam megállapításakor az egyes befizetések időpontját figyelembe véve.

## Gyűjtőjáradékkal kapcsolatos feladattípusok

A gyűjtőjáradékkal kapcsolatban a következő feladatokat fogalmazhatjuk meg:

1. Évente adott összeget betéve a gyűjtőszámlánkra, adott idő elteltével mekkora lesz a gyűjtőszámlán levő összegünk?

2. Ha adott összeget szeretnénk elérni meghatározott idő elteltével, mekkora éves összegeket kell befizetnünk a számlánkra?

3. Hány év szükséges ahhoz, hogy adott összeget elérjünk, ha az évi befizetésünket meghatározott összegben tudjuk biztosítani (mert ez pl. a jövedelmünk függvénye)?

Az első két feladat egymással kompatibilis, az egyikkel elvégzett számításunk eredményét a másikra egy egyszerű arányossággal át tudjuk vinni.

## Gyűjtőjáradék – annuitás, végösszeg kiszámítása

Kiszámítottuk korábban, hogy ha 20 éven át minden év elején befizetünk a bankba 12 000 Ft-ot, és a bank évi 6%-os kamatos kamatot ad a betétünkre, akkor a 20 év elteltével a számlánkon

$$12\,000 \cdot 1{,}06 \cdot \frac{1{,}06^{20}-1}{1{,}06-1} \approx 467\,913 \text{ Ft}$$

lesz.

Ha azt a kérdést tennénk fel, hogy évi hány Ft-ot kell befizetni, ha a célunk a 20 év elteltével 4 000 000 Ft elérése lenne, akkor könnyen látható, hogy a választ a 12 000 Ft $\dfrac{4\,000\,000}{467\,913} = 8{,}549$-szeresére növelésével tudjuk megadni, vagyis kerekítve évi 102 600 Ft lenne ehhez szükséges.

## Járadékgyűjtés időtartamának kiszámítása

Ha a járadékgyűjtés időtartamát szeretnénk megtudni, akkor egy exponenciális egyenletet kell megoldanunk.

Hány éven át kell minden év elején 15 000 Ft-ot betennünk a bankba évi 6%-os kamatos kamatra, ha azt szeretnénk, hogy a folyamat végén (teljes éveket tekintve) 2 000 000 Ft álljon a rendelkezésünkre?

**Megoldás:**

$$15\,000 \cdot 1{,}06 \cdot \frac{1{,}06^n - 1}{1{,}06 - 1} = 2\,000\,000.$$

Az egyenletet rendezve

$$1{,}06^n = \frac{2\,000\,000 \cdot (1{,}06 - 1)}{15\,000 \cdot 1{,}06} + 1,$$

ahonnan

$$n = \log_{1{,}06}\left(\frac{2\,000\,000 \cdot (1{,}06 - 1)}{15\,000 \cdot 1{,}06} + 1\right) \approx 36{,}82.$$

Nyilván a feladat szempontjából a tört éveket nem tudjuk figyelembe venni, felfelé kell kerekítenünk, hiszen kamatfizetés csak év végén van. A kapott érték jelen esetben azt jelenti, hogy 36 év még kevés a célunk eléréséhez, 37 év elteltével pedig egy kicsit túl fogjuk lépni.

## Járadékgyűjtés és infláció

Felmerülhet az a probléma, hogy a jelen számításokban nem vesszük figyelembe az inflációt. Az infláció hatására a befizetendő összegek megemelkednek, akár a nyugdíj-előtakarékosságot tekintve, hiszen a fizetésünk is emelkedik. Nézzük meg, mi történik, ha ezt is beépítjük a számításokba!

Tételezzük fel, hogy minden évben 3%-os az infláció. A bankba tett pénzünket tehát minden évben a korábbihoz képest 3%-kal növeljük. Ekkor az egyes befizetéseket a fentiekben megállapított módon önálló betétként kezelve az alábbi összeget kapjuk (a korábbi példában megadott kezdőösszeggel és kamattal számolva):

$$\begin{aligned} &12\,000 \cdot 1{,}06^{20} + 12\,000 \cdot 1{,}03 \cdot 1{,}06^{19} + 12\,000 \cdot 1{,}03^2 \cdot 1{,}06^{18} + \ldots \\ &\qquad \ldots + 12\,000 \cdot 1{,}03^{19} \cdot 1{,}06 = \\ &= 12\,000 \cdot 1{,}06 \cdot (1{,}06^{19} + 1{,}03 \cdot 1{,}06^{18} + 1{,}03^2 \cdot 1{,}06^{17} + \ldots + 1{,}03^{19}) = \\ &= 12\,000 \cdot 1{,}06 \cdot \frac{1{,}06^{20} - 1{,}03^{20}}{1{,}06 - 1{,}03} \approx 594\,034. \end{aligned}$$

Az így kapott összeg az inflációval korrigált összeg, amelyre a jövőben számíthatunk. Ennek mai értékét azonban nehezen tudjuk felmérni, ezért jobb, ha inflációmentes számításokat végzünk. Ez lényegében a következőket jelenti: mai szinten ismerjük az árakat, a pénz értékét. A mai körülményekhez viszonyítva kapunk egy összeget, amely tekinthető alsó becslésnek a majdani kézhez kapott összeget tekintve (hiszen a befizetések nem fognak stagnálni).

## Életjáradék – Az összegyűjtött pénz kifizetésének egy lehetséges módja

Beteszünk a bankba 4 000 000 Ft-ot, és szeretnénk minden év elején ebből ugyanakkora összegeket kapni 20 éven át. A bank a mindenkor bent lévő összegre évi 5%-os kamatos kamatot ad. Mekkora összeget tudunk kivenni minden év elején?

**Megoldás:** Legyen a keresett összeg $x$. Ekkor a bankban levő pénzünk az alábbiak szerint alakul:

$$\Bigg(\dots\bigg(\Big(\big((4\,000\,000-x)\cdot 1{,}05-x\big)\cdot 1{,}05-x\Big)\cdot 1{,}05-x\bigg)\dots\Bigg)-x=0.$$

A bal oldali képletben a kamatozást jelentő 1,05-dal való szorzás 19-szer jelenik meg, hiszen az utolsó éves összeget a 20. év elején vesszük ki. Ekkor átalakítva az alábbi összefüggést kapjuk:

$$\Bigg(\dots\bigg(\Big(\big((4\,000\,000-x)\cdot 1{,}05-x\big)\cdot 1{,}05-x\Big)\cdot 1{,}05-x\bigg)\dots\Bigg)-x=$$
$$=4\,000\,000\cdot 1{,}05^{19}-x\cdot(1{,}05^{19}+1{,}05^{18}+1{,}05^{17}+\ldots+1{,}05+1)=0.$$

Átrendezve:

$$4\,000\,000\cdot 1{,}05^{19}=x\cdot(1{,}05^{19}+1{,}05^{18}+1{,}05^{17}+\ldots+1{,}05+1),$$
$$4\,000\,000\cdot 1{,}05^{19}=x\cdot\frac{1{,}05^{20}-1}{1{,}05-1},$$
$$x=\frac{4\,000\,000\cdot 1{,}05^{19}\cdot 0{,}05}{1{,}05^{20}-1}=305\,686.$$

Tipikus folyamat, hogy először befizetünk egy adott pénzintézethez, biztosítóhoz aktív munkaképes időnk alatt, majd a befizetett és felhalmozott összeget járadék formájában kérjük kifizetni számunkra (pl. nyugdíjjáradék formájában).

2015 óta törvény rendelkezik arról, hogy életjáradékot csak biztosító vagy állami szervezet fizethet. Korábban volt olyan kezdeményezés, amelynek során lakásuk haszonélvezeti jogát megtartva, de tulajdonjogát átadva a nyugdíjasok cserébe életjáradékot kaphattak az erre szakosodott cégektől. Ma már ez nem lehetséges.

Nézzünk egy tipikus számítást nyugdíjalap-gyűjtésre, majd nyugdíjkifizetésre!

## Gyűjtőjáradék és életjáradék kombinációja

Legyen egy fiatalember kellően tudatos, és 25 éves korában kezdje el fizetésének 10%-át gyűjteni. Alsó becslésként számoljunk a minimálbérrel mint fizetéssel, ez jelenleg kb. 200 000 Ft, tehát 40 éven át havi 20 000, azaz évi 240 000 Ft-ot fizet be emberünk a biztosítóhoz, hogy majd nyugdíjat kapjon belőle. A hosszú távú befektetések kamatait vehetjük évi 5%-nak. Az egyszerűség kedvéért számoljunk éves betéttel és éves kamatjóváírással, mindig az év végén befizetve a pénzösszegeket.

A korábban már elemzett példa alapján a 40 év elteltével

$$240\,000 \cdot 1{,}05 \cdot \frac{1{,}05^{40} - 1}{1{,}05 - 1} \approx 30\,441\,543 \text{ Ft}$$

van a bankban.

Ezt a pénzt szeretnénk nyugdíj formájában megkapni, év elején felvéve az adott évre vonatkozó teljes összeget. A biztosító, tekintve, hogy a járadékfizetés alapját képző összeget már nem tudja hosszútávra befektetni, egy jelképes, 2%-os technikai kamattal számol a bentmaradó pénzünk gyarapodására. Itt azonban van egy kérdés, amit el kell döntenünk: fix időre szeretnénk járadékot kapni, vagy halálunkig, amely esetben a biztosító az átlagos várható élettartamunkra fog fizetni. Kérjük most 20 évre, optimista szemlélettel.

Ebben az esetben az előző példában elvégzett számítások alapján

$$x = \frac{30\,441\,543 \cdot 1{,}02^{19} \cdot 0{,}02}{1{,}02^{20} - 1} = 1\,825\,200 \text{ Ft}$$

lesz az év elején felvehető összeg, tehát a havi összeg 152 100 Ft, ami körülbelül annak felel meg, amennyit a bruttó 200 000 Ft-os fizetésünkből a kezünkhöz kapunk. Egy ilyen rendszerben tehát lényegében megállapítható, hogy 40 év alatt a mindenkori fizetésünk 10%-át befizetve a takarékoskodásra, a gyűjtőperiódus felének megfelelő időtartamra a korábbi jövedelmünket biztosítani tudjuk.

Felmerül itt az a kérdés, hogy ha halálunkig kérjük a járadék fizetését, akkor ezt a biztosító tudja-e fedezni. Ha a biztosítónak sok ügyfele van, akkor mindenki esetében az átlagos élettartamra számítva a járadékot, nagyjából az történik, hogy amennyivel előbb hal meg valaki az átlaghoz képest, egy másik valaki kb. annyival él tovább, tehát amit az egyiknek nem tudtak kifizetni a korai halála miatt, azt a másik ügyfél megkapja, és így kiegyensúlyozódik a dolog.

Van azonban itt egy momentum, amire kezdetben nem gondoltak: A kifizetések nem egyidejűleg történnek, hanem elcsúsztatva. Ha pl. átlagosan 10 éves élettartamra számolják a nyugdíjat, akkor ha valaki 5 év után meghal, a másik pedig 15 év után, akkor a korábban meghalt ember nyugdíját a túlélő csak 5 év eltolódással kapja meg. Ezalatt az 5 év alatt a bentmaradt összeg mindenképpen növekszik, azonban ezt a növekedést a járadékfizetés nem veszi figyelembe, hiszen a kiszámított fix összeget már 5 évvel korábban kifizették volna. Ez az extra haszon sok ügyfél esetén nem kis mértékű, de ma már törvény szabályozza, hogy ezt a biztosító nem nyelheti el, ki kell osztania az életben levő nyugdíjas biztosítottjai között.

## Hiteltörlesztés – hitelezés és a hitelek visszafizetése

A hitelfelvétel nyomán a keletkezett tartozásunk visszafizetése részletekben történik. Az a pénz, amivel tartozunk, az általunk befizetett összeggel csökken, így évről évre kevesebb lesz a tartozásunk. A kezdeti hitelösszeget természetesen minden esetben kamatokkal növelve tartják nyilván, tehát amikor részelszámolás történik, akkor mindig a korábbi tartozásunk kamatokkal növelt összegéhez képest csökken az aktuális tartozásunk.

Nézzünk egy példát!

Felvettünk 20 000 000 Ft hitelt 20 évre, évi 7%-os kamatra. A törlesztés mindig az év végén történik, a kamatszámítás után, minden évben azonos összegekkel (ezt nevezzük annuitásnak). Mennyi legyen ez az összeg, hogy a hitelünk a 20 év alatt visszafizetésre kerüljön?

A tartozásunk az alábbi folyamatképlet szerint alakul:

$$\left(\ldots\left(\left(((20\,000\,000\cdot 1{,}07-x)\cdot 1{,}07-x)\cdot 1{,}07-x\right)\cdot 1{,}07-x\right)\ldots\right)\cdot 1{,}07-x=0.$$

Az utolsó részlet befizetése a 20. év végén történik, előtte 20 kamatozás van. Az egyenletet rendezve és a mértani sorozat tagjaira vonatkozó összegképletet alkalmazva:

$$20\,000\,000\cdot 1{,}07^{20}=x\cdot(1{,}07^{19}+1{,}07^{18}+1{,}07^{17}+\ldots+1{,}07+1),$$

$$20\,000\,000\cdot 1{,}07^{20}=x\cdot\frac{1{,}07^{20}-1}{1{,}07-1},$$

$$x=\frac{20\,000\,000\cdot 1{,}07^{20}\cdot 0{,}07}{1{,}07^{20}-1}\approx 1\,887\,859.$$

Láthatjuk, hogy ez a számítás nagyon hasonló az életjáradék-számításhoz, azonban annyi eltérés van, hogy itt előbb kamatozik az összeg, és csak utána csökkentjük, míg ott előbb csökkentettük, és csak utána kamatozott.

*Miért annuitás, azaz miért fix összeg?*

A bankok számára a legfontosabb dolog: szeretnék visszakapni a pénzüket. Az annuitás a hitel visszafizetésének egyik garanciája: ha kezdetben az adós ki tudja fizetni az adott törlesztőrészleteket, akkor ez később még inkább így lesz, hiszen a jövedelme emelkedik (infláció). Tehát az annuitás a bank számára biztonságot, az ügyfél számára pedig lényegében fokozatosan csökkenő terheket jelent.

## A gyakorlat – havi törlesztés

A gyakorlatban persze nagyon ritka az éves törlesztőrészletek fizetése, a gyakorlatban havonta fizetünk a banknak, és havonta el is számol velünk. Ez a fenti képletekre vonatkoztatva azt jelenti, hogy nem 20, hanem 240 kamatozás van, viszont egy alkalommal csak az éves kamatláb $1/12$ részét fizetjük, jelen esetben $0{,}583\%$ kamatot.

Végezzük el a havi törlesztőrészletre vonatkozó megfelelő számítást is:

$$20\,000\,000 \cdot 1{,}005\,83^{240} = x \cdot (1{,}005\,83^{239} + 1{,}005\,83^{238} + 1{,}005\,83^{237} + \ldots$$
$$\ldots + 1{,}005\,83 + 1),$$
$$20\,000\,000 \cdot 1{,}005\,83^{240} = x \cdot \frac{1{,}005\,83^{240} - 1}{1{,}005\,83 - 1},$$
$$x = \frac{20\,000\,000 \cdot 1{,}005\,83^{240} \cdot 0{,}005\,83}{1{,}005\,83^{240} - 1} \approx 155\,012.$$

Az éves törlesztőrészletek esetén az egy hónapra jutó összeg: 1 887 859 : 12 = 157 321 Ft. Miért magasabb ez az összeg, mint a havi fizetés esetén? Nyilvánvalóan azért, mert a havi törlesztéskor a kamatozó összeg (a tőke) azonnal csökken, így a törlesztés után már kisebb összeg után kell kamatot fizetnünk.

Ugyanakkor a havi kamatozás másik kérdést vet fel: havi tőkésítés esetén tulajdonképpen havi kamatos kamatszámítás történik, de mindez az éves kamatláb $1/12$-ed részével, ami miatt az éves kamat tényleges értéke megváltozik.

## Havi kamatos kamat éves viszonylatban

Számítsuk ki, hogy évi hány %-os kamatozásnak felel meg, ha havi $\frac{7}{12}$% kamatot számolunk fel, havi tőkésítéssel!

Nyilvánvaló, hogy ha beteszünk egy tetszőleges összeget, akkor ez az éves kamatozás esetén az 1,07-szorosára változik. Havi kamatos kamat esetén egy év elteltével

$$\left(1 + \frac{\frac{7}{12}}{100}\right)^{12} = \left(1 + \frac{7}{1200}\right)^{12} = 1{,}0723.$$

Azt kaptuk tehát, hogy ez a számítási mód 7,23%-os kamatot jelent éves szinten.

Érdekes lenne tehát azt meghatározni, hogy az évi 7% kamatozásnak hány százalékos havi kamatos kamatozás felel meg.

$$\left(1 + \frac{x}{100}\right)^{12} = 1{,}07,$$
$$x = 100 \cdot \left(\sqrt[12]{1{,}07} - 1\right) \approx 0{,}5654.$$

Tehát havi 0,5654% kamatot kéne felszámítani, ami éves szintre lineárisan extrapolálva 6,78%-os kamatot jelent.

A bankok a hitelekre ezt a számítást az annuitás meghatározására használják, de a tényleges elszámolás ennél prózaibb módon történik. A hónap elején fennálló tőketartozás éves kamatát kiszámítják, ezt 360-nal osztják, majd megszorozzák az adott hónapban levő napok számával, így megkapják azt az összeget, amelyet az adós kamatként fog megfizetni az adott hónapra. A havi törlesztőrészlet fennmaradó összege a tőketartozást csökkenti.

Látszik, hogy ezzel a módszerrel februárban törlesztjük a legtöbbet a tőketartozásunkból, és a 31 napos hónapokban pedig a legkevesebbet.

Hány napból áll egy év? Rejtélyes módon a banki üzletszabályzatokban mindenhol 360 napnak tekintik az évet a napi kamat meghatározásakor, azonban a kamat tényleges kiszámításakor 365 napra számítják a kamatot. A korábbi havi kamatos kamat bevezetéssel a tényleges kamatláb így már gyakorlatilag a 7% helyetti 7,23%-ról $7{,}23 \cdot \frac{365}{360} = 7{,}33\%$-ra változik.

*A bank nyeresége tehát kettős:*

*– Havi kamatos kamattal a kamatláb növelése.*

*– A napok számának egyoldalú csökkentésével a kamat növelése.*

## Kezelési költség

A korábbi hitelekben a bankok úgynevezett kezelési költséget is felszámoltak. A kezelési költség százalékos mértéke a hitel fennálló futamideje alatt változatlan volt, számítása az alábbiak szerint történt:

A naptári év elején fennálló tőketartozásra kiszámították a kezelési költséget egy éves időtartamra. Ezt az összeget elosztották 12-vel, és minden hónapban ezt a költséget fizette az adós, függetlenül attól, hogy a tőketartozása hónapról hónapra csökkent.

Tehát a törlesztőrészletből először a kamatot, aztán a kezelési költséget vonták le (utóbbit egy adott évben havi fix összegben), és a fennmaradó összeg ment a tőketartozás csökkentésére.

Jelenleg a kezelési költség és a fenti számítás létezik a banki üzletszabályzatokban, de a mértéke 0%.

A korábban kiszámított 20 éves futamidejű, 155 012 Ft havi törlesztőrészletű hitelünk nyomon követésével (például egy Excel-táblázatban) azt a meglepő eredményt kapjuk, hogy a 240 hónap elteltével még mindig 628 859 Ft tartozásunk van.

A havi törlesztőrészletet 156 000-re módosítva már csak 107 986 Ft a maradvány összeg.

Ezt a havi napi számítás és a kerekítések együttesen okozzák. A korábban említett kamatemelő hatás miatt számoljuk újra a korábbi 7%-os kamatra felvett hitelünk havi törlesztőrészletét, most már 7,33%-os éves kamattal számolva!

$$x = \frac{20\,000\,000 \cdot 1{,}0061^{240} \cdot 0{,}0061}{1{,}0061^{240} - 1} \approx 158\,924.$$

Ezzel viszont már lényegében a 231. hónap végére elfogy a hitelünk, de mindenesetre ez jobb becslést ad a tényleges havi törlesztőrészlet értékére.

Végiggondolva a gyakorlati és az elméleti számítások közti eltérést (az Excel-táblázatban jelentkező szignifikáns maradványösszeg), arra a következtetésre juthatunk, hogy a havi kamatos kamat számítása nem okozhat problémát, hiszen a törlesztőrészeteket is havi kamatos kamat figyelembevételével számítottuk ki. Egyedül a bank által egyoldalúan alkalmazott, 360 napos évben 365 napra fizetett kamat kamatemelő hatása nincs beépítve a számításokba.

Számoljuk újra a korábbi 7%-os kamatra felvett hitelünk havi törlesztőrészletét, a 365 napra számolt 7,097%-os éves kamattal számolva!

Ennek havi kamatlába 0,5914%. A módosított kamattal kiszámított havi törlesztőrészlet:

$$x = \frac{20\,000\,000 \cdot 1{,}005\,914^{240} \cdot 0{,}005\,914}{1{,}005\,914^{240} - 1} \approx 156\,224.$$

Ezzel már lényegében rendben van, az Excel-táblázatban a 240. hónap végére kb. 10 000 Ft túlfizetést kapunk, amit nyilván az utolsó törlesztőrészletben lehetne korrigálni.

*A banki ajánlatokban láthatunk két olyan opciót, amely a kezdeti törlesztést könnyíti meg:*

## Csak kamat

A futamidő elején meghatározott ideig csak kamatot kell fizetni. Ez jelentősen alacsonyabb törlesztőrészletet eredményez, azonban ez egyben azt is jelenti, hogy a hitel tőketörlesztése ténylegesen nem kezdődik meg. A banknak ez a legjobb üzlet, hiszen így a tőketörlesztés hiánya miatt mindig megkapja a teljes kamatot. Ha ez így menne örökké, a bank vezetői fütyörészve hátradőlhetnének.

## Csúsztatott hiteltörlesztés

A futamidő elején meghatározott ideig egyáltalán nem kell fizetni, a hitelösszegünk viszont rendes elszámolásban kamatozik. Ez a banknak szintén nagyon kedvező, mert így a kint levő hitelállományát anélkül növeli, hogy komolyabb erőfeszítéseket kéne tennie. A mi hiteltörlesztőrészletünk nagyobb lesz, vagy a futamidő hosszabbodik – mi mindenképpen rosszabbul járunk.

*Magyar Zsolt*
*Szent István Gimnázium, Budapest*

*Magyar Zsolt mesterpedagógus, tehetségfejlesztő szaktanácsadó. 1994-ben végzett az ELTE TTK matematika-fizika szakán, azóta a budapesti Szent István Gimnáziumban tanít, elsősorban matematikát. Részt vett több központi oktatási projektben, a tanártovábbképzések rendszeres résztvevője és előadója. 1998 óta az ABACUS matematikai lapok főszerkesztője, 2004 óta a KÖMAL K feladatait összeállító bizottság tagja. Mesterprogramjának címe: A matematikai gondolkodás fejlesztése stratégiai társasjátékok segítségével.*

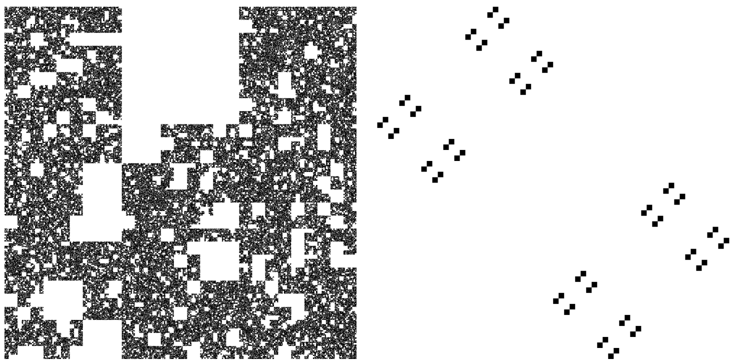
# Benoît Mandelbrot, a fraktálgeometria atyja
## (2020. december, Portré – Interjú)

13.1. ábra. B. Mandelbrot (Forrás: Rama – A feltöltő saját munkája, CC BY-SA 2.0 fr, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=4831595)

Benoît Mandelbrot 1924-ben Varsóban született és 2010. október 14-én halt meg Cambridge-ben (Massachusetts, USA). A fraktálgeometria megteremtője volt. Sokat elárul róla önéletírásának ([8]) címe: The Fractalist: Memoir of a Scientific Maverick (A fraktalista: egy a maga útját járó tudós önéletírása). Zsidó származása miatt 1936-ban, tizenegy éves korában családjával a náci terjeszkedés elől Párizsba menekül. Apai nagybátyja a matematikaprofesszor Szolem Mandelbrojt már 1920 óta élt Franciaországban, doktorátusát Jacques Hadamard témavezetésével szerezte és tanítványai között olyan kiváló matematikusok szerepeltek, mint Paul Malliavin, Jean-Pierre Kahane és Yitzhak Katznelson. A nagybácsi igen nagy hatással volt Mandelbrot fejlődésére, matematikussá válására. Az pedig, hogy segítette Mandelbrot szüleit mint gazdasági és politikai menekülteket megtelepedni Franciaországban, megmentette az életüket. A második világháború idején a német megszállás alatt nem maradhattak Párizsban, délebbre, Tulle-be menekültek. A világháború végén, 1944-ben tértek vissza Párizsba.

Előbb a lyoni Lycée du Parc hallgatója, majd a nagyhírű elitképző párizsi École Polytechnique-re jár. Mesterszakos diplomáját az Egyesült Államokban a California Institute of Technology-n szerzi meg aeronautikából. Doktori (Ph.D.) fokozatát matematikából a Párizsi Egyetemen (Sorbonne) kapta 1952-ben. 1955-ben feleségül vette Aliette Kagant, és előbb Genfbe költözött, kicsit később pedig a Lille-i Egyetemen dolgozott. 1958-ban nyári munkát vállalt az IBM-nél. A nyári munkából 35 évig tartó együttműködés lett. Az IBM-nél hozzájutott ahhoz a számítógépes kapacitáshoz, ami végülis lehetővé tette, hogy a fraktálgeometria atyjává váljon. Az IBM Thomas J. Watson Research Centerben 1980 március elsején elsőnek pillanthatta meg számítógépes képen azt a halmazt, amit később Adrien Douady a tiszteletére Mandelbrot-halmaznak nevezett el.

Mandelbrotot a tiszta elméleti kutatások helyett az alkalmazottabb területek érdekelték. A magát egy szűkebb területen beásó kutató helyett polihisztor volt. Kutatásai számos tudományterülethez kapcsolódtak, például a statisztikus fizikához, meteorológiához, közgazdaságtanhoz, orvostudományhoz, turbulens áramlások elméletéhez, mérnöki tudományokhoz, káoszelmélethez...



13.2. ábra. Balra fraktálperkoláció, jobbra egydimenziós fraktál

A matematikában gyakran és előszeretettel tanulmányozott sima függvények, felületek helyett a durva, egyenetlen és kaotikus dolgok érdekelték, hiszen a valóságban is inkább ezeket látjuk. Legyen szó egy magashegyi tájról, a Hold felszínéről, egy brokkoliról, egy vadul kanyargó folyóról, a tüdő vagy az agy felszínéről, a BUX, vagy a Dow Jones index alakulását leíró görbéről, vagy mondjuk Norvégia partvonaláról. A fraktál szó az ő alkotása volt a latin frāctus = törött, tört szóból. Általában a matematikában precíz definíciókhoz szokott az ember, azonban egy tudományág, melyet egy Mandelbrothoz hasonló „nyughatatlan” tudós indított útjára, kivétel. Tíz évvel ezelőtt, pár nappal Mandelbrot halála után az Origo egyik újságírója felhívta az egyetemünket és néhány átkapcsolás után nekem kellett beszélni vele Mandelbrotról és a fraktálokról. Arra kért, hogy pár mondatban foglaljam neki össze Mandelbrot munkásságát, meg még azt is, hogy mi a fraktálgeometria. Ezután egy meglehetősen szórakoztató párbeszéd következett, hiszen a matematika tudománynépszerűsítésében éppen az a nehéz, hogy sok fogalmat csak több éves tanulmányok után lehet megérteni. Ráadásul a fraktálok esetében még ott van a fogalom precíz definíciója körüli bizonytalanság is. Mindenesetre az Origo akkori cikke ([14]) még most is fenn van az interneten. Hivatalosan, az angol nyelvű wikipédia ([12]) szerint: „In mathematics, a fractal is a self-similar subset of Euclidean space whose fractal dimension strictly exceeds its topological dimension." Így az Origo újságírója azt kérdezte tőlem, hogy akkor ugye a fraktálok önhasonló halmazok, amire persze az volt a válaszom, hogy gyakran azok, de nem mindig. Például e cikkben később említem és ábrákkal is illusztrálom a véletlen/sztochasztikus folyamat segítségével definiált Mandelbrot-/fraktálperkoláció során előálló halmazokat, amelyek pont a véletlen folyamat eredményeképpen nem lesznek önhasonlóak (legfeljebb csak sztochasztikus értelemben). A következő, a fraktálok elnevezése által sugallt definíció az lehetne, hogy olyan halmaz, mely tört-, azaz nem egész dimenziós. Persze vannak egész dimenziós halmazok, amelyeket a matematikusok szeretnek fraktálnak tekinteni, például a 13.2. ábra jobb oldalán van egy ilyen alakzat, pontosabban ezen fraktál konstrukciójának negyedik lépésénél kapott ábra. Ennek készítéséről később még írok.

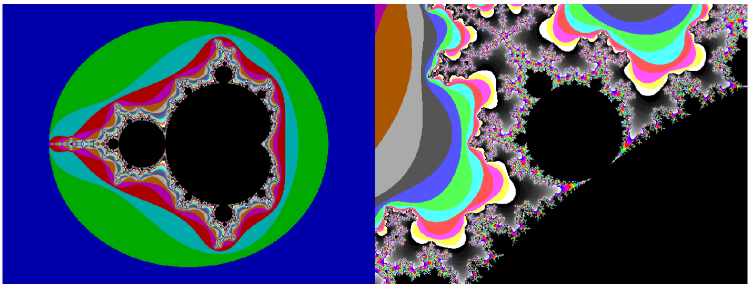
Szórakoztató azt olvasni ([12]), hogy Mandelbrot szerint hogy módosult a fraktál definíciója: először „gyönyörű, átkozottul kemény, egyre hasznosabb. Ez a fraktál". Később jött az 1982-es hivatalosabb, korábban már idézett „olyan halmaz, amelynek Hausdorff-Besicovitch dimenziója szigorúan nagyobb, mint a topológiai dimenziója". Később ezt a definíciót túl szorosnak tartotta, így a következő általánosabb (de a matematikai precizitástól távolabb eső) „definícióval" állt elő: „egy fraktál olyan alakzat, amely az eredetihez valamilyen módon hasonló darabokból áll". Még később: „a fraktál fogalmát nem definiáljuk precízen, a fraktáldimenziót valamennyi változatra alkalmazható gyűjtőfogalomként használjuk".

Mandelbrot Neumann János utolsó posztdok hallgatója volt 1953-54-ben Princetonban. Nem véletlen, hogy a 2003-ban, Neumann születésének 100-ik évfordu-

13.3. ábra. Mandelbrot 2003-ban a BME-n

lóján Budapesten tartott VIII. Országos (centenáriumi) Neumann Kongresszuson részt vett. A mellékelt két képet én készítettem a Műegyetemen tartott előadásán. Ezek közül persze Mandelbrot a Mandelbrot-halmaz előtt az a kép, amit különösen kedvelek bár az előadótermi vetítés miatt Mandelbrot nincs túl jól megvilágítva.

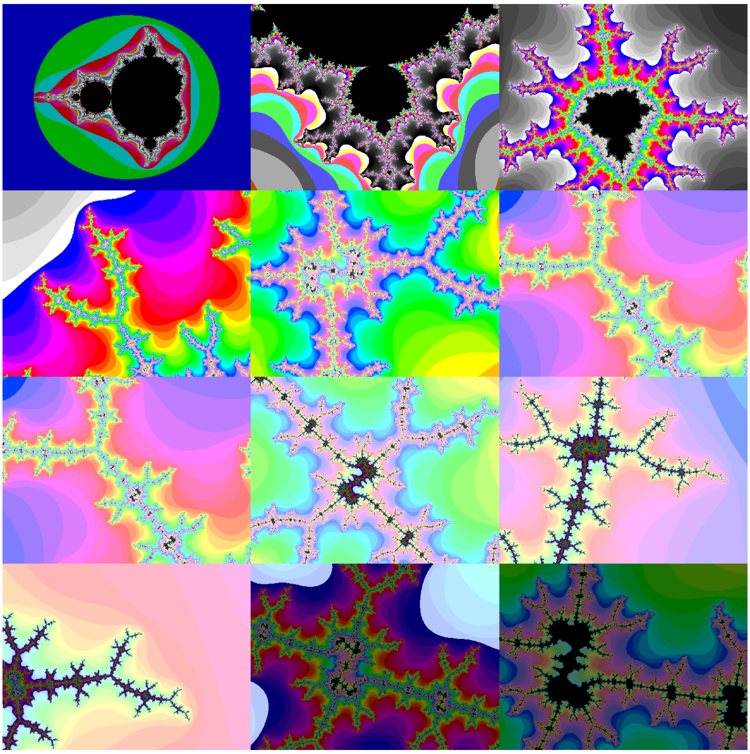
Mi is ez a Mandelbrot-halmaz? Tekintsük a legegyszerűbb leképezéseket a komplex számok fölött. A lineáris leképezések viselkedése túl egyszerű, így másodfokúakat véve vegyük az $f_c(z) = z^2 + c$ leképezéseket, ahol $c$ egy tetszőleges rögzített komplex szám. Ha valaki nem szokott komplex számokkal dolgozni, akkor persze $z = x + iy$, $c = c_1 + ic_2$, $i^2 = -1$ helyettesítés után nyugodtan gondolhat az $xy$-síkon értelmezett $F_{c_1,c_2}(x,y) = (x^2 - y^2 + c_1, 2xy + c_2)$ leképezésre is. Diszkrét dinamikus rendszerek elméletében arra vagyunk kíváncsiak, hogy egy rögzített transzformáció, függvény ismételt alkalmazása során mi történik. Azaz, ha veszünk egy rögzített $z_0$ kiinduló pontot, akkor azt szeretnénk tudni, hogy a $z_1 = f_c(z_0)$, $z_2 = f_c(z_1) = f_c(f_c(z_0)), \ldots, z_n = f_c(z_{n-1}) = f_c^n(z_0), \ldots$ sorozat, a $z_0$ pont pályája/orbitja hosszú távon, hogyan viselkedik. A Mandelbrot-halmaz konstrukciója során $z_0$-t 0-nak választjuk, és azt vizsgáljuk, hogy egy adott $c = c_1 + ic_2 = (c_1, c_2)$ értékre az $f_c^n(0)$, $n = 1, 2, \ldots$ pálya korlátos-e. Pl. könnyen látható, hogy ha $c = 0$, akkor $f_c(0) = 0^2 + 0 = 0$, azaz a 0 a rendszer fixpontja, így $f_c^n(0) = 0$, minden $n$-re, tehát a 0 pont pályája korlátos. Azt sem nehéz belátni, hogy ha mondjuk $c = 10$, akkor $f_c(0) = 10$, $f_c^2(0) = 10^2 + 10 > 10 \cdot f_c(0)$, és általában $f_c^n(0) \geq 10^n$, azaz az $f_c^n(0)$ pálya nem korlátos, a $\infty$-hez tart.



13.4. ábra. A Mandelbrot-halmaz és annak egy részlete

A Mandelbrot-halmaz azon $c$ paraméterértékek halmaza, amelyekre az $f_c^n(0)$, $n = 1, 2, \ldots$ sorozat korlátos. Ezen paraméterértékeknek megfelelő képpontok a 13.4. ábrán a fekete „tócsa” pontjai. A szép színes ábra többi részletéhez egy kis magyarázatra van szükség. Több programmal is tanulmányozhatjuk a Mandelbrot-halmazt, annak részleteit és más fraktálokat is. E cikk készítése közben én a Fractint, illetve a Chaospro programokat használtam. E programokat rövid Google-keresés után bárki letöltheti, és saját maga is felfedezheti a Mandelbrot-halmaz és a fraktálok csodálatos világát. A Mandelbrot-halmaz szokásos ábrázolása során, pl. a 13.4. ábra rajzolása közben az általam használt Fractint egy referenciakört tekint, ami az ábra készítése közben 4 sugarú volt, ezután a képpontokat aszerint színezi, hogy mi az a legkisebb $n$ érték, melyre $f_c^n(0)$ már nem tartozik e kör belsejéhez. A referenciakör sugarát olyan nagyra szokás választani, hogy ha egy $c$ paraméterértékre és $n$-re $f_c^n(0)$ már nem tartozik hozzá, akkor ebből következik, hogy $|f_c^n(0)| \to \infty$. A 13.4. ábrán pl. a nagy zöld krumpli pontjainak megfelelő $c$ értékekre a második, a belsejében levő világoskék zóna pontjai esetében pedig a harmadik iterálásnál kerül ki $f_c^n(0)$ a referenciakörből. A színezési mód változtatásával persze más és más „művészi hatás” érhető el. A következő 13.5. ábrán egy nagyítási sorozatot látunk, azaz az egymást követő képek az előző kép egy kis részletének továbbnagyításával keletkeztek. A Mandelbrot-halmaz már átlagos számítógépek és programok mellett is lélegzetelállító módon nagyítható. A 13.5. ábra jobb alsó sarkában levő kép kb. $10^{12}$-szeres nagyításnak felel meg, ami azt jelenti, hogy ha a kiindulási Mandelbrot-halmazt 1 méteresnek vesszük, akkor a kinagyított részlet egy hidrogénatom átmérője körüli. Ez persze eltörpül a profi Mandelbrot-zoomolók teljesítménye mellett youtube videókban [4]-ben $10^{275}$-szörös, [7]-ben pedig $10^{4004}$-

szeres nagyítási mélységig pillanthatunk bele a Mandelbrot-halmazba. A valós anyagi világunk méreteitől messze elszakadnak ezek a nagyítási nagyságrendek, valószínűleg a fizika sohase jut le a $10^{-4004}$ méteres tartományba.

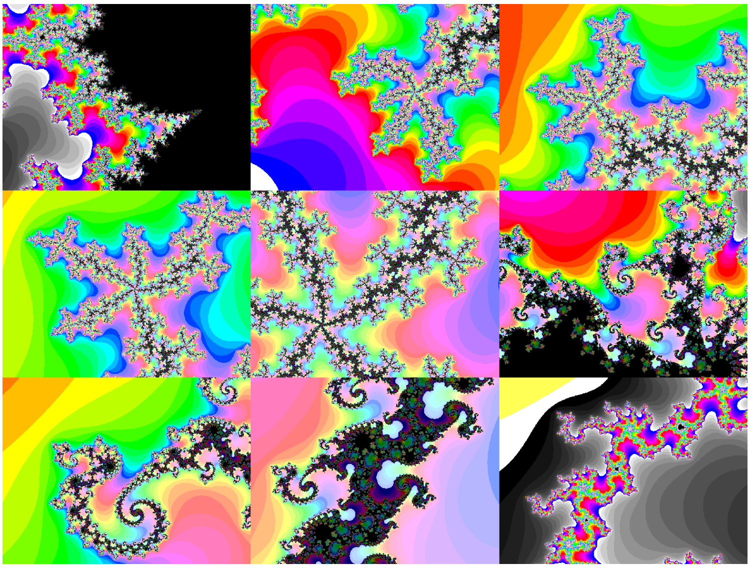


13.5. ábra. Nagyítási képsorozat a Mandelbrot-halmaz egy részletére

Nem kívánok versenyezni a $10^{4004}$-szeres nagyítást elérő szuper videoklipekkel, de azért lejátszható a következő, a Mandelbrot-halmaz részleteire ráközelítő Chaosproval készített saját készítésű kis videoklip: https://youtu.be/VGPHICLdsQQ

Itt pedig egy másik, kicsit hosszabb következik, ennek a végén az utolsó nagyítási képnél az adott szinten megállva a számítógép változtatja a színezést, azaz másképp színezi a $c$ paraméternek megfelelő képernyőpontokat annak függvényében, hogy hanyadik iteráltra jut ki a referenciakörből $f_c^n(0)$: https://youtu.be/p7iEjaxqjpQ

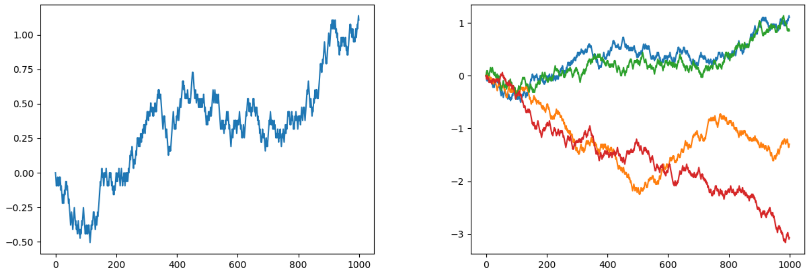
A 13.6. ábrán, nem egy nagyítási sorozatból, még néhány további Mandelbrot-halmaz részlet tekinthető meg.



13.6. ábra. Mandelbrot-halmaz részletek

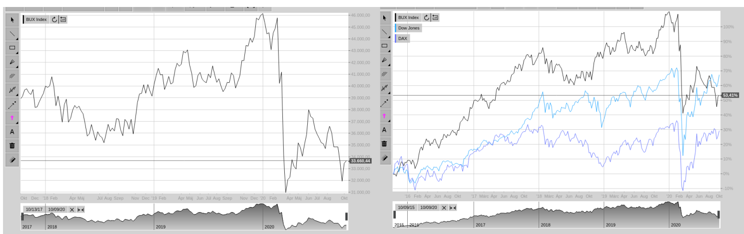
A Mandelbrot-halmaz komplex dinamikus rendszerekhez kapcsolódik. Azonban Mandelbrot matematikai munkássága nem erre a területre koncentrálódott. A Mathematical Reviews/Mathscinet adatbázisban 143 publikációja szerepel, amelyekre 2102 szerző 2020-szor hivatkozott. Számos területen publikált. Legtöbb publikációja és legtöbbet hivatkozott publikációi is a valószínűségszámítás és sztochasztikus folyamatok területéről kerültek ki. Legtöbbet, 593-szor hivatkozott cikke ([9]) is ide tartozik és fraktál/tört Brown-mozgással foglalkozik, ami a közönséges Brown-mozgás általánosítása. Egydimenziós esetben a közönséges Brown-mozgás/Wiener-folyamat véletlen bolyongásból kapható meg határátmenettel. A 13.7. ábrán néhány ilyen számítógéppel generált görbe látható. A bal oldalon egy, a jobb oldalon négy darab, közös koordinátarendszerben. A számítógép az illusztrációk készítése közben véletlen bolyongásokkal közelíti az ábrázolni kívánt Brown-mozgást.

Az ábrákon is látszik, hogy Mandelbrot érdeklődési területének megfelelően egyenetlen/irreguláris fraktálgrafikonok keletkeznek a Wiener-folyamat során.




13.7. ábra. Wiener-folyamat/Brown-mozgás

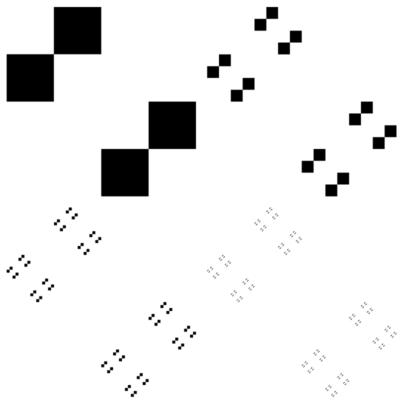
Megmutatható, hogy a Wiener-folyamat Hausdorff-dimenziója egy valószínűséggel $3/2$, míg a középiskolában megszokott sima függvények, pl. $\sin x$ grafikonjának dimenziója 1. A fenti görbék, bár szabálytalanok, de nem tűnnek túlságosan szokatlannak, hiszen pl. újságokban, hírportálokon is gyakran láthatunk hasonló, szabálytalan grafikonokat, elegendő például csak a tőzsdei árfolyamgörbékre gondolni. Valóban a Python/Sage program ([13]), amivel ezeket az ábrákat készítettem, egyébként hajlandó részvényárfolyam-görbék sztochasztikus folyamatokon alapuló szimulációjára is. Ezzel el is érkeztünk Mandelbrot tudományos tevékenységének másik nagy területére. Harmadik legtöbbet hivatkozott műve ([11]) fraktálok, fraktálgeometria pénzügyi folyamatokra való alkalmazásával foglalkozik. Illusztrációként álljanak itt a 13.8. ábrán BUX, illetve a BUX, Dow Jones, Dax egymás mellett (forrás: [1]).



13.8. ábra. BUX-index 3 éves görbe, illetve BUX, Dow Jones, DAX 5 éves görbe

Valóban hasonlítanak a Brown-mozgás/Wiener-folyamat illusztrálására szolgáló folytonos görbékhez, bár a 2020 márciusában a COVID-19 hatására történő „beszakadást” nem látunk a véletlen görbéken.

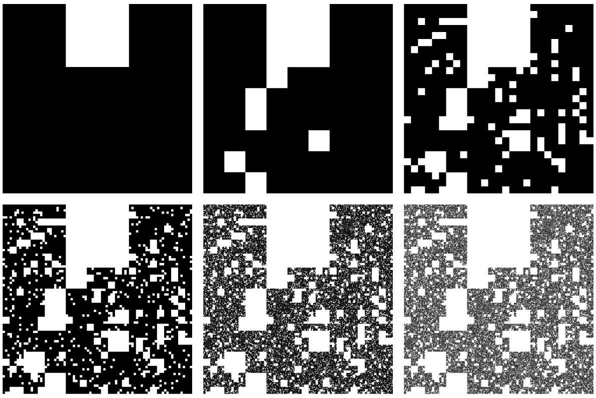
Sztochasztikus folyamatokkal nem biztos, hogy e cikk minden olvasója foglalkozott, így illusztrációként most szeretnék néhány szót szólni a Mandelbrot-/fraktálperkolációról. Ezt a folyamatot Mandelbrot 1974-ben turbulencia vizsgálatával kapcsolatban ([10]) vezette be kanonikus megdermesztés (canonical curdling) néven, a Mandelbrot- vagy fraktálperkoláció nevet később kapta a folyamat.



13.9. ábra. Egydimenziós fraktál

A következő bekezdésben fogok rátérni a véletlen eljárásra. Álljon itt tehát egy determinisztikus módon kapott egydimenziós fraktál, amit már korábban is emlegettem. Vegyük a zárt egységnégyzetet és ezután osszuk fel $4 \times 4$ egyforma résznégyzetre, és a 13.9. ábra bal felső sarkában levő képnek megfelelően dobjunk el 12 db (fehér) kis négyzetet és tartsunk meg 4 db (fekete) négyzetet. Az eljárást ismételgessük mindegyik fekete utódnégyzetben (jobb felső ábra), majd azok utódnégyzeteiben stb., stb. Az egymásba skatulyázott zárt fekete halmazok metszeteként kapjuk a kívánt fraktált, mely egydimenziós lesz, bár a matematikusok általában egyetértenek abban, hogy fraktálnak tekintendő.

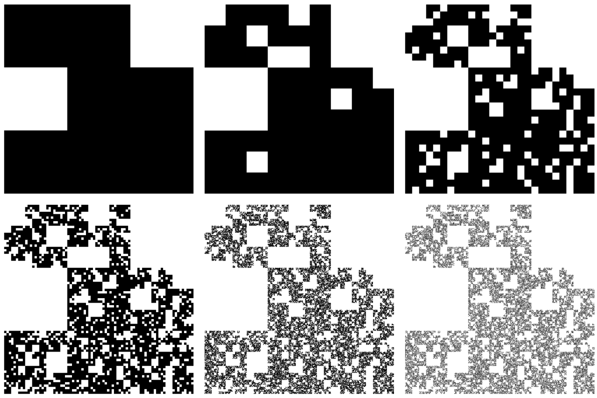
A fraktál/Mandelbrot-perkoláció definíciójánál ismét induljunk a zárt egységnégyzetből, és ezúttal mondjuk $3 \times 3$ egyforma résznégyzetre osszuk fel. Ezután viszont minden egyes kis résznégyzetről „független kockadobásokkal” döntsük el, hogy megtartjuk-e, avagy nem, azaz valamilyen rögzített $0 < p < 1$-re $p$ valószínűséggel tartsuk meg (fekete) és $1 - p$ valószínűséggel dobjuk el (fehér). Utána az első szinten kapott fekete utódnégyzetekben folytassuk az eljárást. Illusztrációképpen a következő három ábrán láthatunk egy-egy általam készített szimulációt $p = 7/8$, $4/5$ és $1/2$ értékek esetén. Persze az ilyen véletlen ábrák minden egyes futtatásnál másként néznek ki. Például előállhat az is, hogy már az első körben mondjuk az előző $p = 7/8$ esetben az összes utód $1/8^9 = 7.45058059692 \cdot 10^{-09}$ valószínűséggel fehér lesz, azaz nem nulla valószínűséggel a fekete halmaz üres lesz.



13.10. ábra. Fraktálperkoláció $p = 7/8$

13.11. ábra. Fraktálperkoláció $p = 1/2$

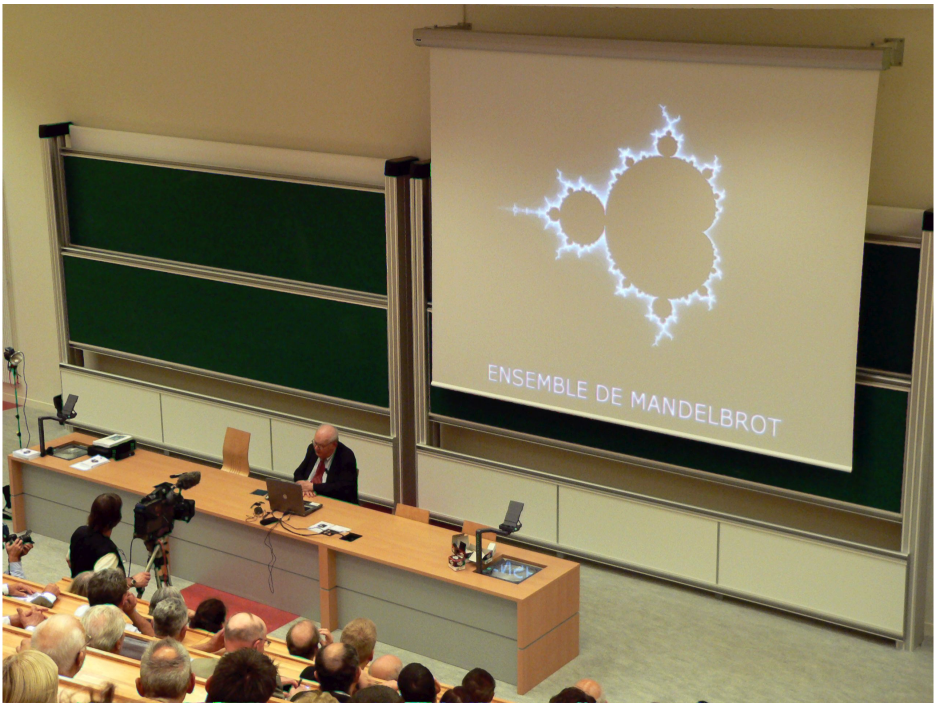
Fraktálperkolációval kapcsolatban még számos megoldatlan probléma létezik. Talán leghíresebb a következő kérdés. Jelölje $E$ a fekete halmazok metszetét. J. T. Chayes, L. Chayes és R. Durrett ([3]) megmutatta, hogy van egy kritikus valószínűség $0 < p_c < 1$, melyre ha $p < p_c$, akkor egy valószínűséggel $E$ teljesen széteső, nincsenek benne összefüggő darabok, ilyen halmaz látható a 13.11. ábrán. Míg ha $p \geq p_c$, akkor pozitív valószínűséggel a kiindulási egységnégyzet két szemközti oldalát $E$ egy összefüggő komponense összeköti, ilyen pl. a 13.10. ábrán látott fraktál. Ennek Hausdorff-dimenziója Kahane és Peyrière ([6]) egy tétele alapján $\ln(3^2 \cdot (7/8))/\ln(3) \approx 1{,}87845448845$. A kritikus $p_c$ valószínűségre vannak becslések, de pontos értéke nem ismert.



13.12. ábra. Fraktálperkoláció $p = 4/5$

Mandelbrot számos kitüntetésben és elismerésben részesült, többek között 1993-ban megkapta a Wolf-díjat (fizikából), 2003-ban a Japán díjat és 2006-ban a Francia becsületrend tiszti fokozatát. Nehéz pontosan megmondani, hogy egy litván származású család Varsóban született és gyerekeskedő, majd Franciaországban tanuló és dolgozó, később USA-ban letelepedő, francia-amerikai kettős állampolgár gyermeke pontosan melyik nemzet büszkesége lehet. Önéletírása alapján úgy tűnik, nem bánta meg, hogy végülis az IBM-et és az Egyesült Államokat választotta. Érdeklődési területeinek, nyughatatlan, több tudományterületet érintő kutatásainak az IBM által nyújtott kutatási szabadság és rugalmasság tökéletesen megfelelt. Az IBM-nél betöltött „főállása” mellett számos egyetemen (pl. MIT, Harvard) volt vendégprofesszor. Élete vége felé pedig a Yale egyetemen lett Sterling Professor. Érdekesség, hogy a Harvardon az egyik évben a közgazdasági, a rákövetkezőben pedig a matematika tanszék vendégoktatója.

Francia kollégái közül sokat ismerek személyesen, tíz évvel ezelőtt pár nappal halála után hivatalos úton Párizsban jártam és találkoztam, beszélgettem velük,




13.13. ábra. Mandelbrot a Mandelbrot halmaz előtt a Becsületrend átvételét követő előadása közben 2006-ban (Forrás: David Monniaux – Ownwork,CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=1165362)

többek között, a szomorú hír okán, Mandelbrotról is. Úgy tűnik, hogy azért ők is „saját halottjuknak” tekintették. Emlékének a Francia Matematikai Társulat SMF, Gazette des Mathématiciens folyóirata különszámot ([5]) szentelt.

## Irodalomjegyzék

[1] BUX Index, https://www.teletrader.com/bux-index/index/chart/tts-4611743?ts=1596672000000&culture=hu-HU

[2] R. Brooks and P. Matelski, The dynamics of 2-generator subgroups of PSL(2,C), in Irwin Kra (1 May 1981). Irwin Kra (ed.). Riemann Sur-

faces and Related Topics: Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (PDF). Bernard Maskit. Princeton University Press. ISBN 0-691-08267-7. https://web.archive.org/web/20190728201429/http://www.math.harvard.edu/archive/118r_spring_05/docs/brooksmatelski.pdf

[3] J. T. Chayes, L. Chayes and R. Durrett, Connectivity Properties of Mandelbrot's Percolation Process, Probab. Th. Rel. Fields 77 (1988), 307–324.

[4] Deepest Mandelbrot Set Zoom Animation ever – a New Record! $10^{275}$ (2.1E275 or $2^9$15), https://www.youtube.com/watch?v=0jGaio87u3A&list=PLVLa3RFibTXVQkK6cv2M74qnKVERD8jqs&index=3&t=0s

[5] S. Jaffard and S. Seuret (szerkesztők), Benoît Mandelbrot, père de la géométrie fractale, Gazette des Mathématiciens, No. 136 (2013).

[6] J.-P. Kahane and J. Peyrière, Sur certaines martingales de Benoit Mandelbrot, Adv. Math. 22 (1976), 131–145.

[7] Mandelbrot Deep Zoom $10^{4004}$, https://www.youtube.com/watch?v=VDMgmZOzZTo&list=PLVLa3RFibTXVQkK6cv2M74qnKVERD8jqs&index=3

[8] B. B. Mandelbrot, The fractalist. Memoir of a scientific maverick. With an afterword by Michael Frame, Pantheon Books, New York, 2012.

[9] B. B. Mandelbrot and J. W. Van Ness, Fractional Brownian motions, fractional noises and applications, SIAM Rev. 10 (1968), 422–437.

[10] B. B. Mandelbrot, Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier, J. Fluid. Mech. 62 (1974), 331–358.

[11] B. B. Mandelbrot, Fractals and scaling in finance. Discontinuity, concentration, risk, Selecta Volume E. With a foreword by R. E. Gomory. Selected Works of Benoit B. Mandelbrot. Springer-Verlag, New York, 1997.

[12] Wikipedia: Fractal, https://en.wikipedia.org/wiki/Fractal

[13] Tirthajyoti Sarkar, Brownian motion with Python, https://github.com/tirthajyoti/Stats-Maths-with-Python/blob/master/Brownian-motion-with-Python.ipynb

[14] Visnovitz Péter, Büszke bajkeverő volt a káprázatos pacák felfedezője origo.hu 2010.10.23. 23:22 https://www.origo.hu/nagyvilag/20101021-benoit-mandelbrot-matematikus-a-fraktal-atyja-a-geometria-megujitoja-portre.html

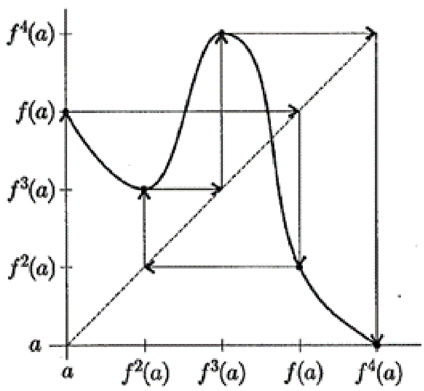
*Buczolich Zoltán*
*ELTE TTK Analízis tanszék*

*Buczolich Zoltán kutatási területe a valós analízis, fraktálok, dinamikai rendszerek, ergodelmélet. Az ELTE egyetemi tanára, az MTA levelező tagja. Vendégprofesszor volt több amerikai állami egyetemen (Kalifornia, Wisconsin, Michigan, Texas). Aktív tudományos együttműködést tart fenn azzal a francia kutatócsoporttal is, amelynek tagjai Mandelbrottal is együttműködtek.*

# Az ukrán matematika egyik ékköve: Sarkovszkij tétele (2022. március, Tudomány – történet – Mi is…?)

1975-ben Li és Yorke amerikai matematikusok egy nagyon érdekes cikket közöltek *Period three implies chaos* címmel. Ebben a tanulmányban jelent meg először a káosz, mint matematikai fogalom. Miről is szólt az ő munkájuk? Tekintsünk egy folytonos függvényt, ami egy intervallumot, például a $[0,1]$-et önmagába képezi, vagyis 0 és 1 közötti értékeket vehet föl. Vegyünk egy kiindulási számot, és értékeljük ki ott ezt a függvényt. Ekkor kapunk egy új számot. Most értékeljük ki a függvényünket ezen az új helyen, és ezt ismételgessük, magyarul szólva iteráljuk a függvényt. Kapunk tehát egy pontsorozatot, amit felfoghatunk úgy is, hogy az $f$ függvény által meghatározott módon bolyongunk a $[0,1]$ intervallumban. A kérdés az, hogy hova juthatunk. Lehetnek olyan $x$ számok, amelyekre $f(x) = x$ (úgynevezett fixpont), és akkor végig egyhelyben toporgunk. Ha van két különböző $x$ és $y$ pont, hogy $f(x) = y$ és $f(y) = x$, akkor világos, hogy két lépés után mindig visszatérünk az $x$ pontba. Ezeket 2-periodikus pontoknak nevezzük. Hasonlóan definiálhatóak a 3, 4, …, $k$-periodikus pontok is, amikor éppen $k$ lépés után érünk vissza először a kiindulási helyzetbe.

Röst Gergely




3. ábra

Példa 5-periodikus pontra a lent idézett Polygon-cikkből.

Li és Yorke egyik fontos eredménye a következő: ha egy függvénynek van 3-periodikus pontja, akkor tetszőleges $k$-ra létezik $k$-periodikus pontja is, vagyis végtelen sok periodikus pont van, és az összes lehetséges periódus szükségszerűen előfordul. Ez azért elég meghökkentően hangzik első hallásra. A cikkben persze más is van, érdemes elolvasni. Mindez olyan nagy érdeklődést váltott ki a matematikusok körében, hogy azóta több mint ötezer hivatkozást kapott, vagyis ennyi matematikai publikáció idézi Li és Yorke eredményeit.

Most jön a csavar: kiderült, hogy már egy évtizeddel korábban egy fiatal ukrán matematikus a fent említettnél sokkal többet bizonyított. Az illetőt úgy hívják, hogy Olekszandr Sarkovszkij, és 1964-ben publikálta eredményeit orosz nyelven, az Ukrajnszki Matematicski Zsurnal hasábjain. A szegedi Bolyai Intézet könyvtárában egyébként megtalálható ez a folyóirat, diákkoromban én is kikerestem a cikket és próbáltam megérteni.

Sarkovszkij az alábbit csinálta: rendezzük sorba a pozitív egész számokat, de ne a szokásos módon, hogy 1, 2, 3, ..., hanem egy egészen speciális rendezés szerint:

$$\begin{aligned}
&3 \prec 5 \prec 7 \prec 9 \prec 11 \prec 13 \prec 15 \prec \ldots \prec \\
\prec\ &2\cdot 3 \prec 2\cdot 5 \prec 2\cdot 7 \prec 2\cdot 9 \prec \ldots \prec \\
\prec\ &2^2\cdot 3 \prec 2^2\cdot 5 \prec 2^2\cdot 7 \prec \ldots \prec \\
\prec\ &2^3\cdot 3 \prec \ldots \prec \\
&\vdots \\
\prec\ &\ldots \prec 2^5 \prec 2^4 \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1.
\end{aligned}$$

Vagyis kezdjük a páratlan számokkal növekvő sorrendben, majd jönnek a páratlan számok kétszeresei, aztán $2^2$-szorosai, $2^3$-szorosai, és így tovább, végül a kettő-hatványok csökkenő sorrendben. Világos, hogy minden számot felsoroltunk, és az is, hogy bármely két számról könnyen el tudjuk dönteni, hogy melyik van előrébb. Sarkovszkij tétele azt állítja, hogy ha egy függvénynek van $k$-periodikus pontja, akkor van $n$-periodikus pontja is, ha $n$ a $k$ után jön ebben a rendezésben. Például 8-periodikus pont létezéséből következik 4-periodikus és 2-periodikus pont létezése, 3-periodikus pont létezéséből következik az összes periódus (ez a speciális eset éppen Li–Yorke tétele), 5-periodikus pont létezéséből következik az összes periódus kivéve három, és így tovább.

Ez az egyik kedvenc matematikai tételem, egyetemista koromban írtam is róla egy esszét Pintér Lajos tanár úr analízis kurzusán, ami később a szegedi Polygon folyóiratban is megjelent (X. kötet, 1. szám, 2000), itt elolvasható a teljes bizonyításnak egy olyan elemi változata, ami akár középiskolás tudással is megérthető.

A képen Olekszandr Sarkovszkij
(Forrás: https://en.wikipedia.org/wiki/Oleksandr_Sharkovsky)

Sarkovszkij tétele tehát sokkal részletesebben feltárja a periodikus pontok közötti viszonyokat, az ukrán folyóiratban közölt cikke azonban annyira eltűnt a süllyesztőben, hogy a megjelenését követő tíz éves időszakból én egyetlen hivatkozást sem tudtam fellelni. A nemzetközi matematikus világ csak jóval Li és Yorke cikke után fedezte fel Sarkovszkijt, és kiderült, hogy a hatvanas években ő már egy egész sor szenzációs eredményt közölt, amiről addig szinte senki sem tudott. Így, ha nagy késéssel is, de végül megkapta a megérdemelt elismerést, és a diszkrét dinamikai rendszerek területén ma már nem létezhet tankönyv Sarkovszkij eredményeinek ismertetése nélkül.

A történet szereplői közül James Yorke 80 éves, a University of Maryland professzora, és még manapság is aktívan publikál új eredményeket. Tien-Yien Li

2020-ban, 75 éves korában elhunyt. Sarkovszkij 85 éves, de 2020-ban még publikált egy cikket. Kijevben született, egész életében ott dolgozott, és jelenleg is az orosz hadsereg által éppen ostromlott városban él.

A cikk szerkesztése közben kaptuk a szomorú hírt, hogy egy Harkovot ért orosz rakétatámadásban meghalt Julia Zdanovska, a 2017-es EGMO (Lányok Európai Matematikai Olimpiája) ezüstérmese. Gyomorszorító arra gondolni, hogy az orosz megszállók által a napokban bombázott Kijevben és Harkovban, a tudomány két fellegvárában számos matematikus kollégánk, köztük több kedves barátunk van jelenleg is életveszélyben. A háború borzalmaival szemben tehetetlenül állva mély emberi együttérzésünket fejezzük ki ezzel az írással is kollégáink iránt. (2022. március.)

*Röst Gergely*
*Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet*

*Röst Gergely 2006-ban kapott PhD fokozatot köztársasági elnöki aranygyűrűvel. Témavezetője a Szegedi Tudományegyetemen Krisztin Tibor volt. Kutatási területei a nemlineáris dinamika és a biológiai rendszerek matematikai modellezése. Dolgozott Torontóban, Arizonában és Oxfordban. Az Európai Kutatási Tanács támogatásával alapított matematikai járványtani kutatócsoportja azóta komoly tudományos központtá nőtte ki magát. A COVID-19 pandémia alatt a Járványmatematikai Modellező és Epidemiológiai projektet vezette. Jelenleg az SZTE Alkalmazott és Numerikus Matematika tanszékének vezetője és az Egészségbiztonság Nemzeti Laboratórium szakmai vezetője.*

## Ugródeszkák matek szakon – Fehér Dániel (2022. március, Portré – Interjú)

### Beszélgetés Fehér Dániellel (University of Luxembourg)

*A matematika szép, de mindenkinek kicsit másért az. Te annak idején gyerekként miért szeretted a matekot?*

Ha van valami, ami nagyon megfog, az az, amikor egy nagyon bonyolult problémára van egy szép, egyszerű megoldás. Ezek az „Aha! Heuréka!” pillanatok azok, amelyekhez az utat nehéz megtalálni, de amikor az ember rájön, ott a dopamin. Talán nem mindenkit, de én olyan vagyok, akit ez jobb kedvre derít.

*Milyen iskolákba jártál?*

Tokaj-Hegyaljáról származom, egy Tállya nevezetű kis faluból. Onnan a szerencsi Bocskai István Gimnázium hatosztályos képzésére mentem az általános iskola után.

*Miért választottad a matek szakot?*

A középiskolában még nem nagyon tudtam, mit szeretnék csinálni, nem volt konkrét tervem, hogy például ilyen vagy olyan mérnök leszek. Mindenképpen reál irányba akartam továbbmenni, de azon belül gőzöm sem volt. A matek mindig is jól ment, és a középiskolai szuper matektanárom, Bodnár György volt az, aki biztatott, hogy menjek matematika szakra, mert szerinte képes vagyok megcsinálni. Én nem feltétlenül értettem egyet vele akkor, de szerencsére igaza lett. Így kerültem az ELTE-re, alkalmazott matematika szakirányra.

*Milyennek találtad a BSc képzést?*

Amikor odakerültem az egyetemre, volt bennem egy félelemérzet, hogy lesz ott rengeteg diák, akik híres-neves gimnáziumokból, sokkal több matekórával a zsebükben jönnek, de szerencsére annyira nem vettem észre ezt a hátrányt, mert a tárgyakat a nulláról építették fel, és mindent részletesen elmagyaráztak. A BSc képzésben olyan alapvető tudásra tettem szert, amit azóta folyamatosan alkalmazok, legyen szó operációkutatásról, lineáris algebráról, valószínűségszámításról vagy éppen statisztikáról.

Emellett az egyik legfontosabb, amit tanultam, az, hogy hogyan kell jól tanulni és megismerni új területeket.

Olyan szempontból is jó választás volt a matek, hogy ott később is lehetősége van az embernek különböző irányokba elmozdulni.

*Milyen területen látod versenyképesnek a matematikus végzettséget?*

Bankszektorban, befektetői cégeknél, informatikai cégeknél stb. Az adatelemzés, adattudomány területekhez is nagyon erős alapot ad a matek. El lehet helyezkedni bármilyen elemző irányban, legyen az logisztika vagy bank, ahol az algoritmikus, kreatív gondolkodást lehet alkalmazni.

*Te hogyan folytattad a tanulmányaidat a BSc után?*

A BSc végén jelentkeztem az EIT Digital Master School mesterképzésre, és az első évet Olaszországban, Trentoban, a második évet Budapesten töltöttem. Itt kriptográfia szakirányon tanultam tovább.

Akkoriban, amikor a mesterszakos diplomámat írtam, nagyon megtetszett a kutatás, és bár előtte más terveim voltak, ez megfordult, és eldöntöttem magamban, hogy jelentkezem doktori képzésre. Szétnéztem a nemzetközi lehetőségek között is, és gondoltam, mi veszteni valóm lehet, elküldtem a jelentkezésemet a Luxemburgi Egyetemre, ahová néhány interjú után fel is vettek.

*Hogyan zajlott a felvételi a doktori képzésre?*

Több, mint 70 jelentkező közül választottak ki 5 jelöltet, akiket visszahívtak online interjúra. Először egy Kenguru tesztverseny feladatsort kellett megoldani, és utána a megoldásainkat elmagyarázni. Egy másik alkalommal nehezebb algoritmikus kérdéseket kaptunk, amelyeken egy hétig gondolkodhattunk. Végül a leendő témavezetőmmel is volt egy interjú, és utána hívtak, hogy megkaptam a lehetőséget.

*A PhD képzés alatt konszenzusos protokollokkal és blokkláncokkal foglalkoztál. Mik azok a konszenzus protokollok?*

Ezek olyan többszereplős rendszerek (multiágens rendszer a magyarban használt szakmai kifejezés), amelyekben a szereplőknek valamilyen biztonságos módon meg kell egyezniük valamilyen adaton. Ilyen adat lehet például pénzügyi tranzakciók ellenőrzése (van-e elég fedezet) és ugyanazon sorrendbe helyezése minden szereplőnél. Ezekben a rendszerekben a nehézség az, hogy lehetséges valamilyen hiba létrejötte, például az egyik szereplő fölött átveszi az irányítást egy támadó. A rendszeren belül a helyesen működő szereplőknek azonban ilyen esetekben is meg kell egyezniük.

*Mi az a blokklánc?*

A blokklánc egy olyan nyílt konszenzus protokoll, amelyben nincs centrális hatóság (például bankok), de mégis lehetővé teszik különböző kreditek (ami a pénz megfelelője) tranzakcióját.

*Mi a disszertációd fő témája?*

Akkoriban, amikor kezdtem a PhD-mat, kijött egy új blokklánc, amelynek a neve Zcash, és az a lényege, hogy lehet úgy fizetni emberek között, hogy nem látható, ki küldi, ki kapja és az sem, mennyit küld, csak egy matematikai zero-knowledge proof létezik a blokkláncon, ami bizonyítja, hogy ez valós tranzakció, de semmilyen más információ nem derül ki a tranzakcióról.

*Elmondanád, mi is a zero-knowledge proof?*

A zero-knowledge proof egy olyan módszer, amelyben egy fél (a prover, bizonyító fél) bizonyítja egy másik félnek (verifier, ellenőrző fél) egy állítás igazságát anélkül, hogy a bizonyító fél bármilyen további információt felfedne. Ez egy pénzügyi tranzakciónál például azt jelenti, hogy a küldő bizonyítja a tranzakció helyességét, azaz van rá elég fedezete, és az elküldött összeg levonódott a számlájáról, de a tranzakció ellenőrzője (pl. egy bank, vagy a blokklánc) nem tudja, mekkora volt a tranzakció összege, és azt sem, ki volt a feladó vagy a címzett.

Érdekesnek találtam ezt a témát, a témavezetőmmel elkezdtük adatelemzői szempontból vizsgálni a Zcash tranzakciókat. A disszertációm arról szólt, hogy milyen információkat tudunk kinyerni azokról, akik ezt a szolgáltatást használják, az alapján, ahogyan a blokklánc publikus részével kommunikálnak.

*Mi volt az adatelemzés mögött a matematika?*

Főképpen valószínűségszámítás. A módszerünk helyességének ellenőrzéséhez például egy elsőrendű Markov-lánccal modelleztük a tranzakciók elméleti viselkedését. Ennek a modellnek egy eleme például az, hogy milyen eséllyel küld a feladó pénzt egy tranzakción belül csak egy vagy pedig több fogadónak.

*Milyen információkat sikerült kinyerni?*

A Zcash-blokkláncnak van egy privát és egy publikus része. Léteznek úgynevezett bújtató tranzakciók, amikor valaki publikus címről küld pénzt privát címre, illetve felfedők, amikor a privát címről küldenek pénzt publikusra. Ezek a műveletek sokszor párban valósulnak meg, és mi ezeket a tranzakciókat kötöttük össze, sok esetben elég nagy valószínűséggel.

*Milyen terveid vannak a PhD után?*

Amikor befejeztem a PhD-t úgy döntöttem, megpróbálok elhelyezkedni az ipari világban, és azon belül is kamatoztatni próbálom az adatelemzési vonalat, amiből a PhD-t is írtam. Hamarosan kezdek az új munkahelyemen Luxemburgban, ahol ajánlórendszerek adatelemzésével fogok foglalkozni.

*Mit jelent az ajánlórendszerek adatelemzése?*

Egy ajánlórendszer például a YouTube algoritmusa, aminek alapján megjeleníti az ajánlott videókat a főoldalon és az éppen nézett videók mellett is. Ezen algoritmusok adatelemzése pedig jelentheti az algoritmus hatékonyságának a kiértékelését, vagy akár új algoritmusok feltehető sikerességének kivizsgálását.

*Mit üzennél a mai fiataloknak, akik hasonló úton járnak?*

Ha van valamilyen rövid üzenet, amit meg lehet fogalmazni, akkor az az, hogy nem kell félni az új területektől, ha van lehetőség, hogy kipróbálja az ember ezeket.

*Az interjút készítette: Bérczi-Kovács Erika*

*Bérczi-Kovács Erika matematikus, jelenleg egyetemi adjunktus az ELTE Operációkutatási Tanszékén, kutatási területe a kombinatorikus optimalizálás. Oktatási munkájáért 2020-ban Gács András díjban részesült. Évek óta szervezője az alkalmazott matematikusokról szóló Öregdiák szemináriumnak, ahol az ELTE-n végzett korábbi hallgatók mesélnek munkájukról. Az Ugródeszkák matekszakon c. cikksorozat első interjúalanyai is ezen alkalmak vendégei közül kerültek ki.*

Az **Érintő** Elektronikus Matematikai Lapok negyedévente új számmal jelentkezik és ingyenesen elérhető a www.ematlap.hu címen. Az online ismeretterjesztő folyóirat első hét évében több mint 200 szerző több mint 600 cikke jelent meg.

Rovataiban a matematikát – kevésbé vagy jobban, de mindenképpen – érintő írások, videók mindazoknak érdekesek lehetnek, akik valamikor érdeklődtek a matematika iránt, vagy ma is használják, tanulják vagy tanítják.

A lap rovatai (és rovatszerkesztői):

HÍREK – ÚJDONSÁGOK (Rákóczi Ildikó), INTERJÚ – PORTRÉ (Oláh Vera felelős szerkesztő) TANÓRA – SZAKKÖR (Horváth Eszter), KÖNYVESPOLC – AJÁNLÓ (Tóth János), TUDOMÁNY – TÖRTÉNET – MI IS...? (Titkos Tamás, korábban Besenyei Ádám), GAZDASÁG – TECHNIKA – MŰVÉSZET (Röst Gergely). Az Érintő hetedik évében indult el a hetedik rovat, a HÉTTUSA (Róka Sándor), amely a rejtvények, fejtörők kedvelőihez szól.

Az Érintő kiadói, a Bolyai János Matematikai Társulat és a Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, és főszerkesztői, Simon Péter és Stipsicz András várják a friss írásokat, megjegyzéseket, véleményeket a szerk.ematlap@gmail.com postafiókra.

Ebben a könyvben az Érintő – Elektronikus Matematikai Lapok első 7 évének terméséből válogattunk össze egy csokorra valót. A kötet 14 cikke a teljesség igénye nélkül jól jellemezte a folyóiratot az elmúlt években, és bemutatja, hogy merre szeretne tartani a jövőben.

VÁLOGATÁS AZ ÉRINTŐ ELSŐ 7 ÉVÉBŐL