Invariáns, monovariáns módszer

Nemecskóné Szabó Zsuzsanna
Árpád Gimnázium
Budapest, 2016. augusztus

Dolgozatom **Fonyó Lajos: Algoritmusok a matematika feladatok megoldásában** c. előadásához kapcsolódik.
Idei matematika táborunk egyik témája lesz az invariáns és a monovariáns módszer bemutatása.
Invariáns: Az állapotfüggvény értéke nem változik az algoritmus egyes lépéseinek végrehajtása során.
Monovariáns: Az állapotfüggvény értéke monoton csökkenést vagy monoton növekedést mutat az algoritmus egyes lépéseinek végrehajtása során.

Íme néhány feladat ebben a témakörben:

Darabolós

1. Az asztalon fekszik egy papírlap. Ezt 10 részre téptük, majd az egyik részt szintén 10 részre téptük. Így haladtunk tovább, egy-egy lépésben mindig kiválasztottunk egy darabot, és azt 10 részre téptük.

   Lehetséges-e, hogy bizonyos számú lépés után

   a) 201 b) 200 c) 199 darab papír lesz az asztalon?

   Megoldás:

   Minden lépésben 9-cel nő a papírdarabok száma: 1-10-19-28...

   A lehetséges papírdarabok száma 9k+1 alakú.

   Csak a c) eset valósítható meg, mert $199 = 9 \cdot 22 + 1$

2. Az asztalon fekszik egy papírlap. Ezt 10 vagy 16 részre darabolhatjuk, majd a kapott részek bármelyikét szintén 10 vagy 16 részre vághatjuk. Ilyen lépések egymás utáni alkalmazásával elérhetjük-e, hogy az asztalon

   a) 400 b) 399 c) 22 darab papír legyen?

   Megoldás: 10 részre osztásnál 9-cel, 16 részre osztásnál 15-tel nő a papírdarabok száma. A változás mindig 3-mal osztható szám.

   A lehetséges papírdarabok száma: N=1+9k+15l alakba írható, ahol k és l természetes szám.

   k a 10 részre vágások száma, l pedig a 16 részre vágások száma.

   Csak az a) eset érhető el.

   A 400=1+9k+15l megoldásai ($k, l \in N$):

k	l
1	26
6	23
11	20
16	17
21	14
26	11
31	8
36	5
31	2

   c) A 22 ugyan 3k+1 alakú, de nem írható 1+9k+15l alakba, ezért nem fordulhat elő.

3. Egy sárkánynak 2017 feje van. A vitéz egy csapással 1, 17, 21 vagy 33 fejet vág le, miközben rendre 10, 14, 0, 48 fej nő ki helyettük. El tudja-e távolítani a vitéz a sárkány minden fejét véges számú kardcsapással?

   Megoldás: Sajnos nem, mert a fejek száma csak 3-mal osztható számmal változtatható.

   -1-310=9; -17+14=-3; -21+0=-21; -33+48=15

   A 2017 3-mal osztva 1 maradékot ad, a 0 pedig 0-t.

Rakosgatós

1. Két kupacban gyufák vannak. Egy-egy alkalommal valamelyik kupacba beteszünk néhány szálat, s ugyanekkor a másik kupacba kétszer annyit helyezünk. Elérhető-e, hogy mindkét kupacban 50 gyufaszál legyen, ha kezdetben az egyes kupacokban

   a) 7 és 34 b) 1 és 3 szál gyufa volt?

   Megoldás: a) Nem érhető el, mert összesen a gyufák számát 3-mal osztható értékkel növeljük.

   7+34=41, 3-mal osztva 2; 50+50=100, 3-mal osztva 1 maradékot ad.

   b) Megvalósítható. Az első kupacot 49-cel, a másodikat 47-tel kell növelnünk.

   49=x+2y és 47=2x+y egyenletrendszer megoldása: x=15 és y=17.

   Ez jó, mert 1+15+34=50 és 3+30+17=50.

   Megjegyzés: Fontos, hogy olyan feladatokat is tárgyaljunk, amelyek megvalósíthatók.

2. Két kupacban gyufák vannak. Egy-egy alkalommal valamelyik kupacból elveszünk néhány szálat, s a másik kupacba kétszer annyit helyezünk. Elérhető- e, hogy mindkét kupacban ugyanannyi gyufaszál legyen, ha kezdetben az egyes kupacokban

   a)7 és 34 b) 1 és 3 gyufa van?

   Megoldás: Az a) eset megvalósítható úgy, hogy az első kupacba 18-at helyezünk, a másodikból pedig 9-et elveszünk. Ekkor mindkettőben 25-25 gyufa lesz.

   A b) eset nem valósítható meg, mert a kupacokban levő gyufák számának különbségét 3-mal osztható számmal tudjuk változtatni. Kezdetben a különbség 2, a végén pedig 0 kellene legyen.

3. Az asztalon egy kupacban 1001 kavics van. Egy lépésben valamely, 1-nél több kavicsot tartalmazó kupacból kidobunk egy kavicsot a maradékot két részre osztjuk. Elérhető-e ilyen lépésekkel, hogy az asztalon 3-3 kavicsból álló kupacok legyenek?

   Megoldás: Nem valósítható meg. Az asztalon maradt kavicsok számának és a kupacok számának összege állandó:

   1001-1=1000; 2 rész

   1001-1-1=999; 3 rész

   1001-1-1-1=998; 4 rész; stb. Ez az összeg mindig 1002.

   Ha a végén csupa 3-3 kavicsot tartalmazó kupac lenne, akkor a kavicsok száma 3k, a kupacok száma k lenne.

   3k+k=4k, de 1002 nem osztható 4-gyel.

4. Egy vázában 75 fehér és 150 fekete babszem van. A váza mellett van egy halom fekete babszem. Találomra kiveszünk két babszemet a vázából.

   Ha legalább az egyik fekete, akkor azt kitesszük a halomba, a másikat pedig visszadobjuk a vázába, akár fehér volt, akár fekete.

   Ha mindkét babszem fehér, eldobjuk őket és a halomból egy fekete babszemet dobunk a vázába.

   Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó vázában maradó babszem fehér?

   Hányszor ismételhetjük meg az eljárást?

   Megoldás:

   A vázában található fehér babszemek száma vagy nem változik, vagy 2-vel csökken. Mivel az elején páratlan számú fehér volt a vázában, az utolsó biztosan fehér lesz, vagyis a keresett valószínűség 1.

   Minden lépésben 1-gyel csökkentjük a vázában található babszemek számát, ezért az eljárást 224-szer végezhetjük el.

5. Egy csodálatos fán 25 alma és 30 körte van. Egy-egy alkalommal két gyümölcsöt szedhetünk le:

   ha egyformákat vettünk le, akkor egy körte,

   ha különbözőket vettünk le, akkor egy alma nő helyettük.

   Összesen hány gyümölcsöt tudunk leszedni a fáról?

   Utolsónak milyen gyümölcs marad?

   Megoldás:

   Minden lépésben 1-gyel csökken a fán levő gyümölcsök száma, ezért összesen 54-szer vehetünk le egyszerre 2-t, és a végén 1 marad. Vagyis összesen $54 \cdot 2 + 1 = 109$ gyümölcsöt szüretelhetünk le a csodafáról.

   A lépések során az almák száma 2-vel csökken, vagy nem változik, tehát az almák számának paritása megmarad, vagyis az utolsó gyümölcs alma lesz.

6. Egy asztalt hatan ülnek körbe, s egyikük előtt van mind a 6 tányér. Egy -egy alkalommal bárki elvehet az előtte levő tányérok közül kettőt, és azokat valamelyik szomszédjának vagy szomszédainak adhatja.

   Elérhetik-e ily módon, hogy mindenki előtt legyen 1 tányér?

   Megoldás:

   Nem, mert ha megfigyeljük három nem egymás mellett ülő személy előtt levő tányérok számának összegét, az mindig páros marad. Ugyanis egy lépésben közülük egy valakinek 2-vel nőhet vagy csökkenhet; illetve közülük kettőnek 1-gyel,1-gyel, vagyis összesen szintén 2-vel nőhet a tányérok száma.

7. Egy asztal körül hatan ülnek, és közülük két személy előtt van egy-egy tányér, a többiek előtt nincs tányér. E két személy között egy ember ül. Egy lépésben két szomszédos személy elé egy-egy újabb tányért helyezünk.

   Elérhető-e néhány ilyen lépéssel, hogy mindenki előtt ugyanannyi tányér legyen?

   Megoldás:

   Nem valósítható meg. Adjuk össze 3 nem szomszédos helyen ülő személy előtt levő tányérok számát, és ebből vonjuk ki a másik 3 személy előtt található tányérok számának összegét. Ez az érték az eljárás során nem változik. Kezdetben ennek abszolút értéke 2, a végén pedig 0-nak kellene lennie.

8. Egy rét körül körben 44 fa áll, mindegyik fán egy-egy picinke cinke. Időnként két cinke egyszerre átrepül a szomszédos fára, de mindig ellenkező irányba: az egyik az óramutató járásával megegyezően, a másik azzal ellentétesen.

   Bizonyítsuk be. hogy a cinkék így sosem fognak összegyűlni ugyanazon a fán.

   Megoldás:

   A fákat valamilyen körüljárás szerint megszámozzuk az 1,2,3,...44 számokkal. Az i-edik fához hozzárendeljük az $S_i = i \cdot a_i$ számot. Ahol a_i a fán ülő cinegék száma. Figyeljük az S összeg változását, ahol $S = S_1 + S_2 + S_3 + ... + S_{44}$ Ennek az összegnek a változása 44 vagy 0 lehet. Kezdetben $S = 1 + 2 + 3 + ... + 44 = 22 \cdot 45$, a végén pedig $44 \cdot k$, ahol k jelöli annak a fának sorszámát, ahol összegyűlnének a cinkék. Ebből látható, hogy 44-gyel nem osztható számból nem juthatunk 44-gyel oszthatóhoz.

9. Néhány gyerek körben áll. Mindenkinél vagy néhány szem cukorka. Egy jelre mindannyian átadják cukorkáik felét a jobboldali szomszédjuknak, ha a náluk levő cukorkák száma páratlan, a játékvezető ad egy plusz cukorkát.

   Bizonyítsuk be, hogy bizonyos számú ilyen művelet után mindenkinek ugyanannyi cukorkája lesz.

   Megoldás:

   Figyeljük a cukorkák számát. A körben szereplő legnagyobb szám (M) nem nőhet, tehát a végén legfeljebb $n \cdot M$ cukorka lehet összesen, ahol n a gyerekek száma.

   A legkisebb szám pedig vagy nő vagy ugyanannyi marad. Ugyanannyi csak akkor maradhat, ha több is van a legkisebb számból, és azok közül kettő egymás mellett szerepel, ám közülük az egyik így is mindenképpen nő.

   Az eljárás tehát véges sok lépésben véget ér, és a számok között nem lesz legkisebb, vagyis mindenkinél egyenlő számú cukorka lesz.

Átváltozós

1. Egy szigeten 13 szürke, 15 barna, 17 zöld kaméleon él. Ha két különböző színű kaméleon találkozik, akkor annyira megijednek egymástól, hogy mindketten a harmadik színre változtatják bőrüket. Két azonos színű kaméleon nem ijed meg egymástól, így találkozáskor nem változtatják meg színüket.

   Lehetséges-e, hogy egy idő után minden kaméleon ugyanolyan színű legyen?

   Ha kezdetben 13 szürke, 25 barna és 17 zöld kaméleon él a szigeten, akkor elérhető-e, hogy mindegyik kaméleon ugyanolyan színű legyen Milyen szín lehet ez?

   Milyen kiindulás esetén lehet, hogy a végén mind zöld lesz?

   Megoldás:

   Nem érhető el, mert az egyes színek száma különbségének a hárommal való osztási maradéka az eljárás során mindig ugyanannyi marad. Mivel a végén ennek a különbségnek 0-nak kellene lennie, csak akkor valósítható meg a kívánt állapot, ha a kiinduló értékek 3-mal való osztási maradéka megegyezik. Feltétel még, hogy az összeg páros legyen, hiszen az utolsó előtti lépésben x;x;0 alakúnak kell lennie az egyes színek számának.

   Pl. megvalósítható a kívánt végeredmény 1 szürke, 4 barna és 7 zöld kaméleon esetén:

sz	b	z
1	4	7
9	0	3
6	0	0
0	0	12

   Megjegyzés: A feltétel nem elégséges. Pl. 1 szürke, 13 barna, 4 zöld kaméleon esetén megvalósítható;

   de 1 szürke, 7 barna 10 zöld kaméleon esetén nem valósítható meg, hogy mind zöld legyen.

2. Egy táblára 6 db 0, 7 db 1-es és 8 db 2-es számot írtunk fel. Egy -egy alkalommal két számot letörlünk, s helyettük a harmadikat írjuk fel. Néhány ilyen törlés után csak egy szám marad a táblán. Mi lehet ez a szám?

   Megoldás: Az eljárás során a páros számok darabszáma vagy nem változik vagy 2-vel csökken, tehát a paritása nem változik. Ezért utolsónak csak az 1-es maradhat.

3. Egy táblára felírtuk az 1, 2, 3, ... 2016, 2017 számokat. Egy -egy alkalommal két számot letörlünk, s helyettük azok különbségét írtuk.

   Lehetséges-e, hogy a megmaradt szám a 0?

   Megoldás:

   Nem lehetséges, mert a táblán maradt számok összege minden alkalommal csak páros számmal csökkenhet. Ugyanis a+b helyett a-b szerepel, ami 2b-vel csökkenti az összeget.

   Az eredeti összeg: $1 + 2 + 3 + ... + 2017 = 2017 \cdot 1009$, vagyis páratlan.

4. Egy táblára felírtuk az 1, 2, 3, ... 2015, 2016 számokat. Egy -egy alkalommal két számot letörlünk, s helyettük azok összegének 17-es osztási maradékát írtuk. Néhány ilyen törlés után csak egy szám marad a táblán. Mi lehet ez a szám?

   Megoldás: Az eljárás során a 17-tel való osztási maradék nem változik. Mivel

   $1 + 2 + 3 + ... + 2016 = 2017 \cdot 1008 = 119596 \cdot 17 + 4$, vagyis a 17-es maradéka 4, az utolsó szám is a 4 lesz.

5. 1-től 10000000-ig minden számot helyettesítünk a számjegyinek összegével. Az eljárást addig folytatjuk, amíg minden szám egyjegyű lesz.

   Az 1-esekből vagy a 2-esekből lesz több a végén?

   Megoldás:

   1-esekből lesz több a végén. A művelet nem változtatja meg a számok 9-cel való osztási maradékát. A végén tehát az eredeti számok 9-cel való osztási maradékát kapjuk.

   $1000000 = 9 \cdot 111111 + 1$. Ebből következik, hogy 111112 db 1-es és 111111 db 2-es marad a végén.

6. Egy kör kerületére írunk N db pozitív egész számot. Bármely két szomszédos szám közé beírjuk a legnagyobb közös osztójukat, majd az eredeti számokat töröljük. Ezt a műveletet elvégezzük az új számokkal is.

   Bizonyítsuk be, hogy a műveletet véges sokszor végrehajtva minden szám egyenlő lesz.

   Megoldás:

   Két szám legnagyobb közös osztója mindig kisebb vagy egyenlő, mint az eredeti számok. Tehát a kör kerületére írt számok összege monoton csökkenni fog. Mivel ez az összeg csak véges sok értéket vehet fel, a végén minden szám egyenlő lesz az összes eredetileg szereplő szám legnagyobb közös osztójával.

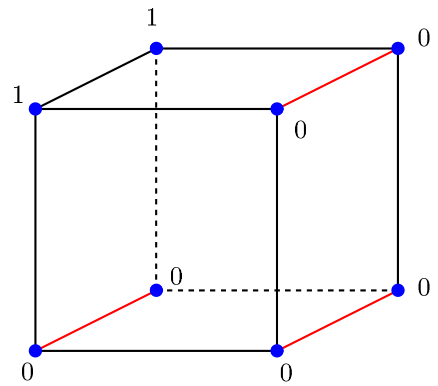
7. Egy kocka csúcsaiba számokat írtunk. Egy-egy alkalommal valamelyik él két végén álló számot 1-gyel növelhetjük.

   Ezt az eljárást néhányszor megismételve elérhető-e, hogy minden csúcsban ugyanaz a szám álljon, ha kezdő állapotban a) az egyik csúcsban 1-es, a többiben 0 van; b) az egyik él két csúcsában 1-es, a többi csúcsban 0 van; c) az egyik lapátló két csúcsában 1-es, a többi csúcsban 0 van; d) az egyik testátló két csúcsában 1-es, a többi csúcsban 0 van?

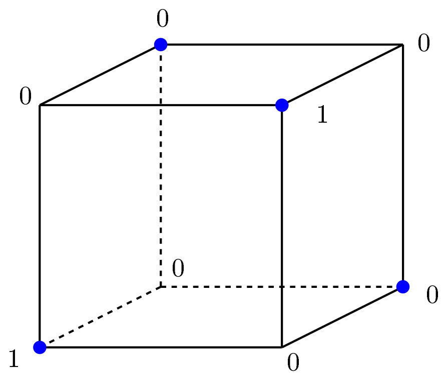
   Megoldás:

   a) Nem érhető el, mert a csúcsokra írt számok összege az eljárás során csak párossal nőhet. Az eredeti összeg 1, a végén pedig 8k alakúnak kellene lennie.

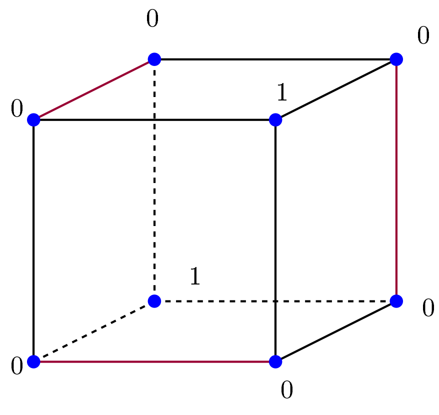
   b) Elérhető, például a pirossal jelölt élek választásával.



   c) Nem érhető el, mert a jelölt és a jelöletlen csúcsokon levő számok összege az eljárás során 1-gyel, 1-gyel nő. Ugyanis minden él esetén az egyik csúcs jelölt, a másik pedig jelöletlen. A kiinduláskor az egyik mennyiség 0, a másik pedig kettő, és a végén ugyanannyinak kellene lennie.



   d) Elérhető, például a színessel jelölt élek választásával.

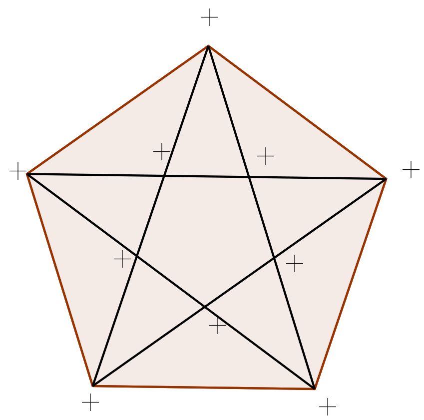


8. Egy tetraéder éleire felírtuk az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számokat. Ezután minden csúcsra elvégeztük a következő műveletet: az ide futó éleken lévő számokat összeadtuk, és ráírtuk a csúcsra. Kaphattunk-e a csúcsokon egyforma számokat?

   Megoldás: Nem kaphattunk, mert minden élre írt szám két csúcshoz tartozik, vagyis a csúcsokra írt számok összege az élekre írt számok összegének kétszerese. Ha a csúcsokon egyforma számok lennének, akkor ez az összeg osztható lenne 4-gyel, ami jelen esetben nem teljesül, ugyanis $2 \cdot (1+2+3+4+5+6) = 42$, ami nem osztható 4-gyel.

9. Egy szabályos ötszögben berajzoltuk az összes átlót. Minden csúcshoz és az átlók mindegyik metszéspontjába +1-et írunk. Egy lépésben megváltoztatjuk az összes szám előjelét valamelyik oldalon vagy valamelyik átlón.

   Elérhető-e, hogy mindenhol -1 legyen?



   Megoldás: Nem érhető el. Figyeljük a belső ötszögben szereplő számok változását.

   Egy átló választása esetén a következő lehetőségek fordulhatnak elő.

   + + helyett - -, a változás -4

   - - helyett + +, a változás +4

   - + helyett + -, a változás 0.

   Vagyis a változás mindig 4-gyel osztható. +5-ből pedig ily módon nem kaphatunk -5-öt.

10. Egy végtelen fehér négyzetrácsos papíron véges sok négyzetet feketére festettünk. Ezt követően percenként minden négyzet olyan színűre váltja a színét, amilyen önmaga, a fölső és a jobb oldali szomszédja között a többségben levő szín.

Bizonyítsuk be, hogy egy idő után nem lesz több fekete négyzet.

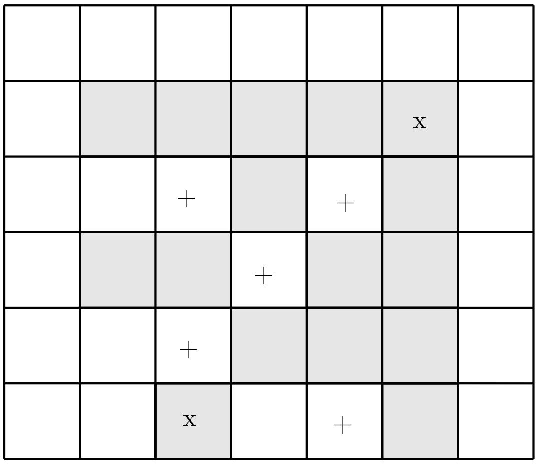
Megoldás:

Helyezzünk el a papíron egy olyan koordináta rendszert, amelynek I. síknegyede az összes fekete négyzetet tartalmazza. (Ezt megtehetjük, hiszen ezekből véges sok van.) Így minden fekete négyzet csúcsainak koordinátája nem negatív szám.

Tekintsük a fekete négyzetek bal alsó csúcsának koordinátáit. Ezek közül a legnagyobb összegű mindenképpen fehérre fog változni a következő lépésben, mert a tőle jobbra és felette levő négyzetek ezen koordinátájának összege nagyobb, tehát ezek nem lehetnek az adott időben feketék. (Ha több ilyen is van, akkor azok mind.)

Az idő folyamán tehát a legnagyobb koordináta összeg csökkenni fog. Mivel ez az összeg csak véges sok értéket vehet fel, és szigorúan monoton csökken, ezért a végén az összes négyzet fehér lesz.

Megjegyzés: A fekete négyzetek száma nem feltétlenül monoton csökkenő. Például az ábrán a következő percben az x-szel jelölt fekete mezők fehérre, a +-szal jelölt fehérek pedig feketére változnak, vagyis a fekete mezők száma 3-mal nő.



Felhasznált irodalom:

Róka Sándor: 2000 feladat az elemi matematika köréből

Dmitry Fomin and Lev Kurlyandchik: Light at the end of tunnel

Yury ionin and Lev Kurlyandchik: Some things never change

Nemecskó István: Invariáns és monovariáns módszer (Nagy Károly Napok 2010)